Breviar Teoretic: Funcţia de gradul II

Definiţie: Funcţia de forma $f:\Re \to \Re,\ f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\neq 0$ şi $a,b,c\in\Re$ se numeşte **funcţie de gradul doi**.

Remarcă:

1) Funcţia $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\neq 0$ se numeşte **funcţie de gradul doi** sau **funcţie de gradul al doilea** sau **funcţie pătratică**.

2) Funcţia $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\neq 0$ mai poate fi reprezentată în următoarele forme:

a) în **forma canonică:** $f:\Re\to\Re,\ f(x)=a\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$

b) în **forma factorizată:** $f(x)=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$, dacă $\Delta>0$

Trasarea graficului funcției de gradul II

1) Dacă a>0, atunci graficul reprezintă o parabolă cu ramurile orientate în sus;

Dacă a<0, atunci graficul reprezintă o parabolă cu ramurile orientate în jos.

2) Se determină vârful parabolei, adică punctul $V(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a})$

3) Se scrie ecuaţia axei de simetrie a parabolei: $x=-\dfrac{b}{2a}$

4) Se determină punctele de intersecţie ale parabolei cu axele de coordonate:

• Cu axa Oy: $x=0\Rightarrow y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c \Rightarrow C(0;c)$ – punctul de intersecţie al parabolei cu axa Oy: $P\cap Ox=\{C\}$;

• Cu axa Ox : $y=0 \Rightarrow f(x)=0\Rightarrow ax^2+bx+c=0$.

Au loc 3 cazuri în dependenţă de semnul lui Δ, unde $\Delta=b^2-4ac$:

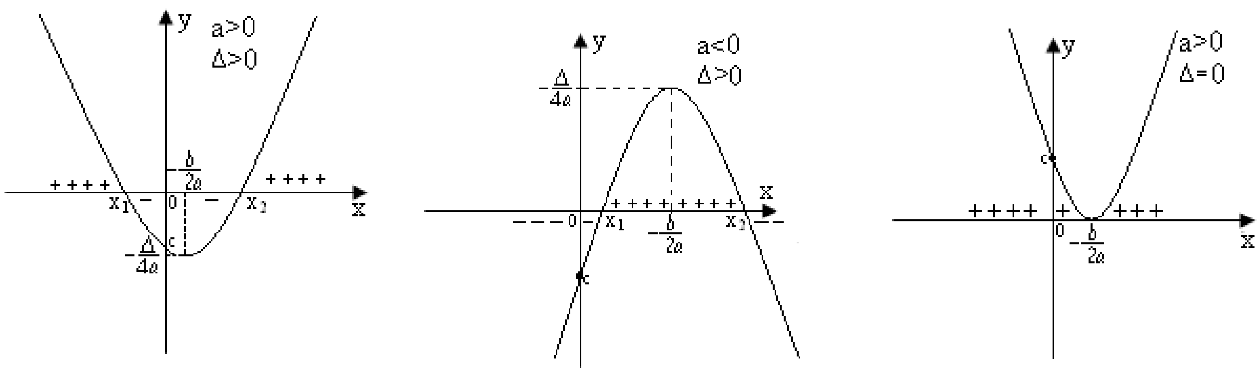
I. Dacă $\Delta<0$, atunci parabola nu intersectează axa Ox: $P\cap Ox=\varnothing$;

II. Dacă $\Delta=0$, atunci parabola intersectează axa Ox într-un singur punct $V(-\dfrac{b}{2a};0)$ – vârful parabolei, care este situat pe axa *Ox*: $P \cap Ox = \{V\}$;

III. Dacă $\Delta > 0$, atunci parabola intersectează axa *Ox* în două puncte:

$A(x_1; 0)$ ***şi*** $B(x_2; 0)$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, adică zerourile funcţiei pătratice *f*.

5) Se trasează graficul G_f al funcţiei, care reprezintă **o parabolă** *P*.(ex. Fig)



Proprietăţi ale funcţiei de gradul doi $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

1) Domeniul (maxim) de definiţie al funcţiei este $D(f) = R$.

2) Extremele şi punctele de extrem ale funcţiei:

I. Dacă $a > 0$, atunci funcţia are un **minim:**

Valoarea minimă a funcției este $f_{\min} = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Abscisa punctului de minim este $x_{\min} = -\dfrac{b}{2a}$

• **Vârful parabolei** $V(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ este **punctul de minim** al funcţiei;

II. Dacă $a < 0$, atunci funcţia are un **maxim:**

Valoarea maximă a funcției este $f_{\max} = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Abscisa punctului de maxim este $x_{\max} = -\dfrac{b}{2a}$

• **Vârful parabolei** $V(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$ este **punctul de maxim** al funcţiei.

3) Mulţimea valorilor funcţiei (domeniul de valori al funcţiei) $E(f)$**:**

I. Dacă $a>0$, atunci **mulţimea valorilor funcţiei** este $E(f)=\left[-\frac{\Delta}{4a};+\infty\right)$;

II. Dacă $a<0$, atunci mulţimea valorilor funcţiei este $E(f)=\left(-\infty;-\frac{\Delta}{4a}\right]$.

4) Monotonia funcţiei de gradul doi:

I. Dacă $a>0$, atunci:

a) funcţia este **strict descrescătoare** pe intervalul $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$;

b) funcţia este **strict crescătoare** pe intervalul $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$;

II. Dacă $a<0$, atunci:

a) funcţia este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$;

b) funcţia este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$;

5) Semnul funcţiei de gradul doi:

Cazul I $\Delta<0 \Rightarrow x_1,x_2 \notin \Re$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Semn a	

Cazul II $\Delta=0 \Rightarrow \exists x_1,x_2 \in \Re, x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Semn a	0	Semn a	

Cazul III $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \Re, x_1 \neq x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		Semn a	0	Semn contrar a	0	Semn a	

Exemple de aplicaţii:

1. Se consideră funcţia $f:\Re \to \Re, f(x) = x^2 - mx + m, m \in \Re$. Să se determine numărul real m astfel încât minimul funcţiei să fie egal cu 1.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} f_{\min} = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ \Delta = (-m)^2 - 4\cdot 1\cdot m \Rightarrow \Delta = m^2 - 4m \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{m^2-4m}{4} = 1 \Rightarrow m^2 - 4m = -4 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

2. Să se demonstreze că parabola asociată funcţiei $f:\Re \to \Re, f(x) = x^2 - 4x + 4$ este tangentă axei Ox.

Rezolvare: Dacă parabola este tangentă axei Ox atunci $y_V = 0$. Deci trebuie să demonstrăm că $-\frac{\Delta}{4a} = 0$.

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}{2\cdot 1} = -\frac{16-16}{2} = 0$$

Relațiile lui Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Formarea ecuației de gradul II când cunoaștem suma și produsul rădăcinilor $x^2 - S\cdot x + P = 0$

Aplicaţii:

ECUAŢIA DE GRADUL al II-lea

1. *Rezolvaţi următoarele ecuatii cu forma incompletă după model:*

$$ax^2+bx=0. \quad \Rightarrow x(ax+b)=0 \quad \Rightarrow x=0 \text{ sau } ax+b=0. \quad x_1=0 \text{ şi } x_2=-\frac{b}{a}$$

a) $x^2+3x=0$
b) $x^2-2x=0$
c) $3x^2+9x=0$
d) $4x^2-12x=0$
e) $8x^2+5x=0$
f) $15x^2+3x=0$
g) $-0{,}5x^2+3{,}5x=0$
h) $-3x^2-13x=0$
i) $x^2+3\sqrt{2}x=0$
j) $x^2-\sqrt{5}x=0$
k) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{6}x=0$
l) $\sqrt{3}x^2+3x=0$

2. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu forma incompletă după model:*

$$ax^2+c=0. \quad \Rightarrow ax^2=-c \quad \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \quad \textit{dacă } -\frac{c}{a}>0 \Rightarrow |x|=\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\textit{dacă } -\frac{c}{a}<0 \Rightarrow x_{1,2}\notin R$$

a) $x^2-1=0$
b) $x^2-36=0$
c) $64x^2-81=0$
d) $3x^2-75=0$
e) $x^2+25=0$
f) $4x^2-9=0$
g) $5x^2-45=0$
h) $4x^2-196=0$
i) $36x^2-225=0$
j) $16x^2-1=0$
k) $x^2-25=0$
l) $x^2+3=0$
m) $-x^2+3=0$
n) $(x+1)^2-9=0$
o) $(2x-3)^2-144=0$
p) $(x-2)^2-100=0$
q) $(x+3)^2-49=0$
r) $5(x-3)^2-125=0$
s) $3(x+3)^2-27=0$
t) $(x+3)^2-49=0$
u) $-(x+2)^2-36=0$
v) $-(x+2)^2+36=0$

3. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu formula generală de rezolvare a ecuaţiilor de gradul al II-lea:*

$ax^2+bx+c=0. \quad \Delta=b^2-4ac$

dacă $\Delta<0 \Rightarrow x_{1,2}\notin R$

dacă $\Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

dacă $\Delta>0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

a) $x^2-5x+6=0$
b) $x^2+x-12=0$
c) $2x^2-3x-2=0$
d) $x^2-8x+15=0$
e) $x^2+x-6=0$
f) $x^2-4x-21=0$

g) $x^2+2x-24=0$
h) $x^2+3x-10=0$
i) $3x^2-x-2=0$
j) $3x^2+4x-4=0$
k) $2x^2+7x+3=0$
l) $2x^2+7x-4=0$
m) $4x^2+5x-6=0$
n) $2x^2-9x+4=0$
o) $2x^2-7x+3=0$
p) $6x^2-7x+2=0$
q) $2x^2-5x-12=0$
r) $6x^2+x-2=0$
s) $2x^2+3x-5=0$
t) $-3x^2-x+2=0$
u) $-x^2+x+6=0$

4. ***Rezolvaţi ecuaţiile:***

a) $(3x-8)(x-2)=0$
b) $(2x-5)(3x+7)=0$
c) $x(x-1)(x-2)=0$
d) $(2x-5)(3x-1)(4x+1)=0$
e) $(x+1)^2+(x+2)^2-2(x-3)^2=5x^2$
f) $(x-3)^2+2(x-1)^2=4x+3$
g) $(x-2)^2+(x+3)^2-25=(x-2)(x+2)$
h) $(2x-1)^3+(x+1)^2=(2x+1)^3+(x-2)^2-23$
i) $\dfrac{2x-1}{x+7}=\dfrac{3x+4}{x-1}$
j) $\dfrac{x-7}{3x+1}=\dfrac{x}{x-3}$
k) $\dfrac{(x-1)^2}{3}=2x-5$

INECUAŢIA DE GRADUL al II-lea

1. Rezolvati in ***R*** urmatoarele inecuatii:

a. $x^2-5x+6\le 0$
b. $x^2+x-12\le 0$
c. $2x^2-3x-2\le 0$
d. $x^2-8x+15\le 0$
e. $-x^2+x+6\le 0$
f. $-x^2-4x+21\le 0$
g. $x^2+2x-24\ge 0$
h. $x^2+3x-10\ge 0$
i. $3x^2-x-2\ge 0$
j. $-3x^2+4x+4\ge 0$
k. $2x^2+7x+3\ge 0$
l. $-2x^2+7x+4\ge 0$
m. $4x^2+5x-6>0$
n. $2x^2-9x+4>0$
o. $2x^2-7x+3>0$
p. $6x^2-7x+2<0$
q. $2x^2-5x-12<0$
r. $-6x^2+x+2>0$
s. $2x^2+3x-5<0$
t. $-3x^2-x+2>0$
u. $-x^2+x+6>0$
v. $-x^2+3x>0$
w. $x^2-36<0$
x. $3x^2-75\le 0$
y. $-4x^2-12x\ge 0$.
z. $(x+3)^2-49\le 0$

2. Rezolvati in **Z** urmatoarele inecuatii:

a. $x^2-5x+6\le 0$
b. $x^2+x-12\le 0$
c. $2x^2-3x-2\le 0$
d. $x^2-8x+15\le 0$
e. $-3x^2+4x+4\ge 0$
f. $-2x^2+7x+4\ge 0$
g. $6x^2-7x+2<0$
h. $2x^2-5x-12<0$
i. $-6x^2+x+2>0$
j. $2x^2+3x-5<0$
k. $-3x^2-x+2>0$
l. $-x^2+x+6>0$
m. $-x^2+3x>0$
n. $x^2-36<0$
o. $3x^2-75\le 0$
p. $-4x^2-12x\ge 0$.
q. $(x+3)^2-49\le 0$
r. $(x+3)^2-49<0$

3. Rezolvati in **N** urmatoarele inecuatii:

a. $x^2-5x+6\le 0$
b. $x^2+x-12\le 0$
c. $2x^2-3x-2\le 0$
d. $x^2-8x+15\le 0$
e. $-3x^2+4x+4\ge 0$
f. $-2x^2+7x+4\ge 0$
g. $6x^2-7x+2<0$
h. $2x^2-5x-12<0$
i. $-6x^2+x+2>0$
j. $2x^2+3x-5<0$
k. $-3x^2-x+2>0$
l. $-x^2+x+6>0$
m. $-x^2+3x>0$
n. $x^2-36<0$
o. $3x^2-75\le 0$
p. $-4x^2-12x\ge 0$.
q. $(x+3)^2-49\le 0$
r. $(x+3)^2-49<0$

APLICAȚII TIP BACALAUREAT:

1. Să se determine $m \in \Re$ astfel încât $x^2 - (m-3)x + m - 3 > 0, \forall x \in \Re$.
2. Să se determine $m \in \Re^*$ astfel încât graficul funcției $f : \Re \to \Re, f(x) = mx^2 - x + 1$ să conțină punctul $A(2,3)$.
3. Să se determine $m \in \Re$ știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m^2 + 3)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 7$.
4. Să se determine valorile reale ale parametrului *m* astfel încât ecuația $x^2 + mx + 9 = 0$ să adită două soluții reale egale.
5. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - x - 1 = 0$ verifică relația $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = x_1 + x_2 + 2$.
6. Să se determine valorile reale ale numărului *m* știind că valoarea minimă a funcției $f : \Re \to \Re, f(x) = x^2 - 2mx + 3m$ este egală cu 2.
7. Să se determine valorile reale nenule ale lui *m* pentru care graficul funcției $f : \Re \to \Re, f(x) = mx^2 - (m+1)x + 1$ este tangent axei *Ox*.
8. Să se determine $m \in \Re$ știind că valoarea maximă a funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = -x^2 + 2x - m + 3$ este egală cu 10.
9. Să se determine $m \in \Re$ știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - mx + m + 2 = 0$ verifică egalitatea $2x_1 x_2 = x_1 + x_2$.
10. Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2009x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
11. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 1$ cu axele de coordonate.
12. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care graficul funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - (m-1)x - m$ este tangent axei *Ox*.
13. Să se determine $m \in \Re$ astfel încât minimul funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - mx + m$ să fie egal cu 1.
14. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ are coordonatele egale.

15. Să se formeze o ecuație de gradul al II- lea, ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 11 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{11}{30} \end{cases}.$$

16. Să se arate că oricare ar fi $m \in \Re$, parabola asociată funcției $f : \Re \to \Re$, , $f(x) = x^2 - mx + m^2 + 1$ este situată deasupra axei Ox.

17. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m+1)x + m = 0, m \in \Re$, verifică relația $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1$.

18. Să se determine $m \in \Re$ astfel încât minimul funcției $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 + mx + 2$ să fie egal cu -2.

Breviar Teoretic: Vectori

Vector = mulțimea segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat

Not. $\overrightarrow{AB}$ sau $\vec{u}, \vec{v}$ etc.

Vectori egali: au aceeasi direcție (dreptele suport sunt fie pe aceeaşi dreaptă, fie pe drepte paralele), aceeaşi lungime şi acelaşi sens.

Vectori opuşi: au aceeasi direcție, aceeaşi lungime şi sens opus. ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, unde $\vec{0}$ este vectorul nul – originea coincide cu extremitatea)

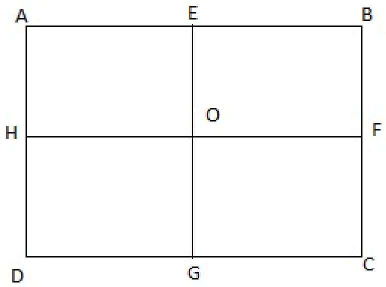
Adunarea a doi vectori:

1. Regula triunghiului : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2. Regula paralelogramului: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, unde ABDC paralelogram

Vectori coliniari: doi vectori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt coliniari dacă $\exists k \in \Re\ a.i\ \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$; dacă $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt coliniari atunci şi *A*, *B*, *C* sunt puncte coliniare.

Exemplu de aplicație: 1. Se dă figura:



Să se calculeze: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Regula paralelogramului); $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH}$ (Regula triunghiului);

$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OC}$ (se caută un vector egal cu $\overrightarrow{EB}$ care sa aiba originea fie în *G*, fie în *O*)

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Arătați că

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Rezolvare: ΔABC echilateral $\Rightarrow O$ este și centrul de greutate

Fie $D\in BC$, D mijlocul segmentului BC $\Rightarrow AD$ înălțime și mediană $\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$. (1)

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OR}$ (regula paralelogramului) $\Rightarrow OBRC$ paralelogram $\Rightarrow D$= intersecția diagonalelor $\Rightarrow \overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OD}$. Cum $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

Aplicații:

1. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, știind că A,B,C sunt vârfurile unui triunghi.

2. Dacă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.

3. Fie ΔABC echilateral, înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.

4. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.

5. Triunghiul ABC are centrul de greutate G. Dacă punctul M, este mijloacul segmentului BC, să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AG}=a\,\overrightarrow{MA}$.

6. Fie triunghiul echilateral MNP înscris într-un cerc de centru O. cercului circumscris Să se demonstreze că: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

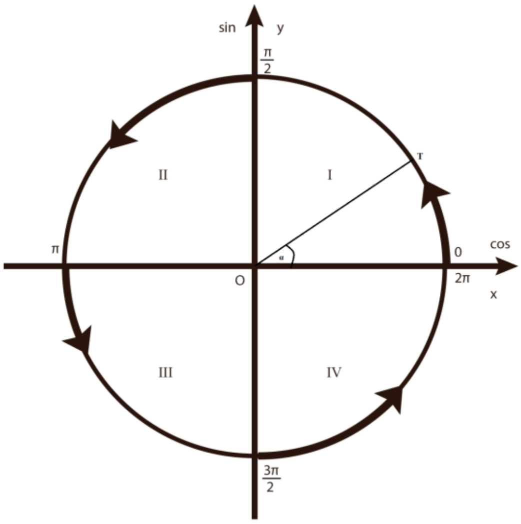
7. Să se demonstreze că în patrulaterul $MNPQ$ are loc relația $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

8. Se consideră pătratul $ABCD$ de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

9. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$.

Breviar Teoretic: Elemente de trigonometrie

Cercul trigonometric



Teorema fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \Re$

Exemplu de aplicație:

Determinați $\cos x$ știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Rezolvare:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{25-9}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5} \, dar \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

Valorile funcţiilor trigonometrice fundamentale:

Unghi / Fct. trigon	0° (0 rad)	30° ($\frac{\pi}{6}$)	45° ($\frac{\pi}{4}$)	60° ($\frac{\pi}{3}$)	90° ($\frac{\pi}{2}$)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

De reținut: $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2}$ și $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq 0$

Reducerea la primul cadran:

a. - din cadranul II : $\sin t = \sin(\pi - t)$, $\cos t = -\cos(\pi - t)$, $(t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right))$

b. - din cadranul III $\sin t = -\sin(t - \pi)$, $\cos t = -\cos(t - \pi)$, $(t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right))$

c. - din cadranul IV $\sin t = -\sin(2\pi - t)$, $\cos t = \cos(2\pi - t)$, $(t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right))$

Exemplu de aplicație: Să se calculeze $\sin 120^\circ + \cos 150^\circ$

Rezolvare:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 120^\circ + \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Formule de calcul pentru sume și diferențe:

$\sin x = \cos(90^\circ - x)$ $\cos x = \sin(90^\circ - x)$

1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
2. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$, $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Particularizând, obținem: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ și $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Transformarea sumelor și diferențelor în produs:

1. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$
2. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Aplicații:

1. Să se demonstreze că expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x$ este constantă.
2. Să se calculeze $\sin^2 130^\circ+\cos^2 50^\circ$.
3. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{4}{5}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.
4. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.
5. Să se calculeze $\cos^2 45^\circ+\sin^2 135^\circ$.
6. Să se calculeze $\sin 120^\circ$.
7. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.
8. Să se calculeze $\sin 170^\circ-\sin 10^\circ$.
9. Să se calculeze $\cos 30^\circ+\cos 60^\circ+\cos 120^\circ+\cos 150^\circ$.
10. Să se calculeze $(\cos 150^\circ+\cos 30^\circ)(\sin 120^\circ-\sin 60^\circ)$.
11. Să se calculeze $\cos 80^\circ+\cos 100^\circ$.
12. Să se calculeze $\sin^2 80^\circ+\sin^2 10^\circ$.
13. Să se calculeze $tg^2 30^\circ+ctg^2 45^\circ$.
14. Să se calculeze $\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 160^\circ+\cos 170^\circ$.
15. Să se calculeze $\sin^2 150^\circ+\cos^2 30^\circ$.
16. Să se arate că, pentru orice unghi ascuțit x, este adevărată egalitatea $\sin x\cdot\cos(90^\circ-x)+\cos^2(180^\circ-x)=1$
17. Să se calculeze $\sin 135^\circ+tg 45^\circ-\cos 45^\circ$.
18. Să se calculeze $\sin x$, știind că $\cos x=\frac{12}{13}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

<u>Breviar Teoretic: Aplicații ale trigonometriei în geometrie</u>

Consider $\Delta ABC, AB = c, AC = b, BC = a$

1. Teorema cosinus (T. Pitagora generalizată):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ sau $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2. Teorema sinusurilor:

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, *R*- raza cercului circumscris triunghiului *ABC*

3. Aria unui triunghi:

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$ sau $A_{\Delta} = \dfrac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\prec l_1, l_2)}{2}$

<u>Formula lui Heron</u> : $A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

<u>Aria triunghiului dreptunghic</u> $A_{\Delta} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$; <u>Aria triunghiului echilateral</u> $A_{\Delta} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

<u>Exemple de aplicații:</u>

1. Știind că triunghiul *ABC* are *BC*=10, *AC*=5 și $AB = 5\sqrt{3}$, să se calculeze $\cos A$.

Rezolvare: $\cos A = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \dfrac{25 + 75 - 100}{2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}} = 0$ (deci $m(\prec A) = 90^\circ$).

2. Să se calculeze raza cerului circumscris ΔABC, știind că *BC*=4 și măsura unghiului *A* este de 30°.

Rezolvare: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \dfrac{1}{2} = 4 \Rightarrow R = 4$

3. Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, știind că *AC*=10, *BC*=16 și $m(\prec C) = 60^\circ$

Rezolvare: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \dfrac{10 \cdot 16 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 40\sqrt{3}$

<u>Aplicații:</u>

1. Fie triunghiul *ABC* cu *AB*=4, $AC=\sqrt{7}$ și $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze *cosB*.
2. Fie triunghiul *ABC* cu *AB*=1, $AC=2$ și $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze *cosB*.
3. Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB*=5, *AC*=6 și *BC*=7. Să se calculeze *cos A*.
4. Se consideră triunghiul *ABC* de arie egală cu 6, cu *AB*=3 și *BC*=8. Să se calculeze *sin B*.
5. Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC* știind că *AB*=2, *BC*=4 și $m(\prec B)=60^\circ$.
6. Să se calculeze *sinA*, știind că în triunghiul *ABC* se cunosc *AB*=4, *BC*=2 și $m(\prec C)=60^\circ$.
7. În triunghiul *ABC* se cunosc *AB*=*AC*=6 și $BC=6\sqrt{3}$. Să se calculeze *cosB*.
8. Să se calculeze raza cerului circumscris ΔABC, știind că *AB*=3 și măsura unghiului *C* este de 30°.
9. Să se calculeze lungimea laturii *BC* a triunghiului *ABC* știind că *AB*=6, *AC*=10 și $m(\prec A)=60^\circ$.
10. Să se calculeze raza cerului circumscris ΔABC, știind că *BC*=8 și $m(\prec A)=45^\circ$.
11. Raza cerului circumscris ΔABC este $\frac{3}{2}$, iar *BC*=3. Să se calculeze *sinA*.
12. În triunghiul *MNP* se cunosc *MN*=3, *MP*=5 și $m(\prec M)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii *NP*.
13. Să se calculeze lungimea laturii *AC* a triunghiului *ABC* știind că $BC=\sqrt{2}$, $m(\prec BAC)=30^\circ$ și $m(\prec ABC)=45^\circ$.
14. Să se calculeze lungimea laturii *BC* a triunghiului *ABC* știind că $m(\prec A)=90^\circ$, $m(\prec B)=30^\circ$ și $AB=4\sqrt{3}$.
15. Să se calculeze lungimea laturii *AC* a triunghiului *ABC* știind că $m(\prec B)=45^\circ$, $m(\prec C)=30^\circ$ și $AB=10$.
16. Să se determine măsura unghiului *A* din triunghiul ascuțitunghic *ABC*, știind că *BC*=6 și raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $2\sqrt{3}$.
17. Triunghiul ABC are $AB=3, AC=5, BC=7$ .Să se calculeze $\cos A$
18. Să se calculeze perimetrul ΔABC ştiind că $AB=4, AC=3, m(\prec A)=60^\circ$.
19. Triunghiul ABC are $AB=5, AC=8, BC=7$. Să se calculeze $m(\prec A)$.
20. Să se calculeze raza cerului circumscris ΔABC, știind că *AC*=6 și $m(\prec B)=30^\circ$.