

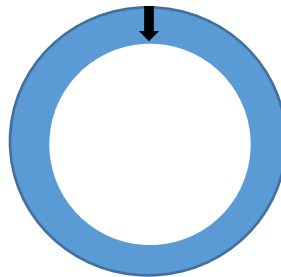
MATEMATICA

A DOUA ȘANSĂ

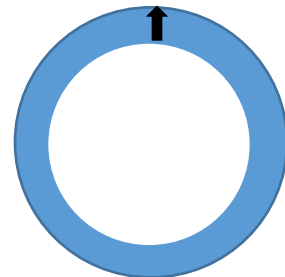
Lecție introductivă

Orice problemă ar fi în atenția noastră, recomandăm să încercați cât mai frecvent organizarea informației noi, să folosiți diverși organizatori, grafici, sau de altă natură.

Iată un exemplu. În primul capitol veți discuta despre diferențele dintre deducție și inducție, așa cum apar acestea în gândirea noastră, în matematică sau în contexte mai largi. Pentru o înțelegere mai simplă a fenomenului, poate ajuta, cu siguranță, ceva de felul următor:



DEDUCȚIE



INDUCȚIE

Însuși desenul sugerează esența: deducția trimite de la general la particular, din exterior spre interior, de la general la particular. În cazul inducției, desenul ne amintește contrariul. Puteți explica ce înțeles are desenul pentru voi? Asemenea reprezentări puteți face cu ușurință. Profesorul vostru vă va ajuta, cu siguranță. Puteți folosi tabele, grafice, desene, scheme, planuri, ș.a.m.d., în funcție de scopul pe care îl aveți și de natura problemei. În introducere, să vedem împreună o problemă, pe care vrem să o analizăm în spiritul acestui ghid. Iată situația:



Pe o stradă a unui oraș se află o benzinărie. La un moment dat, pe partea cealaltă a străzii, se deschide o altă benzinărie, aproape de prima. Există o lege, care permite modificarea prețului benzinei doar o dată pe lună, exact în data de 15 ale fiecărei luni, până cel târziu la ora 24. Proprietarii celor două benzinării nu cunosc intențiile lor reciproce de a majora sau nu prețul. Și care e problema? – ne putem întreba, pe bună dreptate. O situație devine problemă, doar dacă o percepem ca atare. Dacă așa stau lucrurile, atunci ne putem formula o serie de întrebări care vor dezvălui caracterul de problemă. Spre exemplu:

1. Se apropie data de 15. Majorăm sau nu majorăm prețul?
2. Avem vreun motiv să majorăm?

3. Ce va face benzinăria vecină? Va majora și ea?

4. (întrebarea voastră) _____

5. (întrebarea voastră) _____

Fără întrebări de acest fel, problema nu este problemă. Unele întrebări se leagă direct de context, altele mai puțin.

Care credeți că este întrebarea cea mai „arzătoare” din lista de mai sus?

În toate cazurile, este foarte important să distingem între ce știm (datele problemei) și ce vrem să aflăm (cerințele problemei). De cele mai multe ori nu avem cale directă să aflăm răspunsul la întrebarea noastră. Pe mine m-ar interesa dacă vecinul mărește prețul, sau nu, în data de 15. Credeți că ar fi o măsură deșteaptă să mă duc să-l întreb pe patronul vecin? Ar spune, oare, ce intenție are? Și chiar dacă își declară intenția, este sigur că o va respecta până la miezul nopții? Sau, să încerc mai bine o rezolvare de altă natură? În spiritul acestui ghid, DA! Încearcă o rezolvare a ta, o strategie cât mai independentă, o soluție care să-ți aparțină!

Comentarii.

- Mai important decât soluția problemei este modul în care ajungem (sau nu!) la ea
- S-ar putea să nu putem găsi soluție la problema noastră
- S-ar putea să găsim mai multe rezolvări

Discutați în clasă despre aspectele prezentate mai sus. Alegeți spre analiză alt text (alt context de problemă), care să vă permită discuții similare. Este important să observați că nu despre „probleme de matematică” va fi vorba, ci despre probleme cotidiene, pe care vom încerca să le abordăm (și) cu ajutorul

matematicii. Pentru acest lucru, avem nevoie de câteva „instrumente”:

cunoștințe, deprinderi de lucru și – foarte important – o atitudine pozitivă față de această provocare.

- Puteți să dați exemple de cunoștințe matematice pe care le aveți?

(Ajutor: triunghi, număr, _____)

- Puteți exemplifica deprinderi de lucru folosite des în matematică?

(Ajutor: calcul, desenare, _____)

Reflecțați asupra unor atitudini pe care e bine să le avem în procesul de învățare.

Un exemplu: CURIOSITATEA.

Cert este că avem nevoie de o gândire cât mai corectă, cât mai rațională, cu un cuvânt, de logică. De ce? Iată un exemplu celebru: Un crocodil prinde un copil, dar îi promite tatălui acestuia că îl lasă liber, dacă tatăl va ghici ce face el, crocodilul. Tatăl spune: – Nu îl vei lăsa pe copilul meu. Puneți-vă în rolul crocodilului și gândiți-vă ce va trebui să faceți. Să nu uitați, că sunteți un „crocodil” cinstit!

Capitolul I



Provocarile matematice sunt, de fapt, problemele. Problemele pe care trebuie sa le înfruntam zi de zi, unele exprimate în limbajul matematicii, altele în mod obișnuit.

Nu exista rezolvare de probleme fara sa ne gândim ordonat, fara sa facem apel la reguli și la logica.

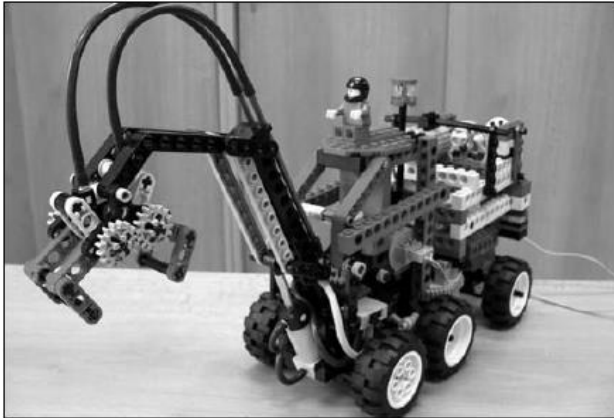
În capitolul 1 am grupat acele cunoștințe introductive și elementele de logica de care avem nevoie în rezolvări de probleme. Temele cu care veți face cunoștința sunt:

- 1.1. Mulțimi și puțină logica;
- 1.2. De la ipoteza la concluzie;
- 1.3. Deducție și inducție;
- 1.4. Logica de toate zilele.

Lecțiile va vor ajuta sa va însușiți o serie de termeni și noțiuni pe care le vom folosi în ghid. Va oferim o introducere sumara în elementele de logica, necesare în rezolvarea de probleme.

Vom vedea ce înțelegem printr-o problema, care sunt datele și cerințele ei, care sunt operațiile logice de baza și cum ajungem de la ipoteza la concluzie. Deja din acest capitol vom avea prilejul sa descoperim, sa formulam, sa rezolvam diferite probleme și sa cautam aplicații ale celor învățate în situații și contexte interesante noua.

Capitolul se va parcurge în 8 ore, la care se mai adauga 2 ore destinate evaluării și autoevaluării.



Mulțimi și puțina logica 1



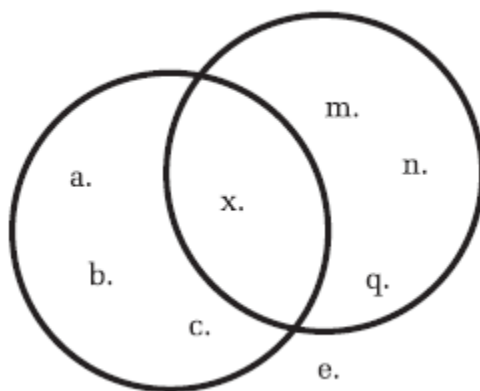
Se întâmplă să...

Viața de zi cu zi e plină de surprize și capcane. De multe ori greșim, mai mult sau mai puțin, și plătim pentru erorile noastre. De multe ori judecăm lucrurile și oamenii în mod eronat. O șansă bună să ne apărăm de greșeli este să ținem lucrurile (și ideile noastre!) în ordine.



Citește și descoperă!

Cine seamănă se adună, spune un proverb înțelept. Obiectele, lucrurile, persoanele care au ceva în comun se pot pune într-o singură mulțime. Proprietatea comună a elementelor este definitorie pentru mulțime. Spre exemplu, taximetrele aparținând aceleiași firme din orașul Arad constituie, dacă ne este util să gândim astfel, o mulțime bine definită. Cămășile mele din dulap formează o altă mulțime, precum și toate numerele naturale, spre exemplu. Mulțimile sunt formate din elemente. Dacă un element face parte din mulțime, spunem că aparține mulțimii. Formal, scriem așa: $a \in M$, ceea ce înseamnă că elementul a aparține mulțimii M . Interpretați desenul următor:



Într-un mod destul de abstract, mulțimea A , formată din acele elemente x care au proprietatea comună, definitorie P , este scrisă astfel: $A = \{x \mid P(x)\}$

Spre exemplu, $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ este, evident, formată din 0, 1, 2 și 3. Putem scrie liniștiți: $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$. $\mathbb{N}$ este simbolul mulțimii numerelor naturale, deci $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Proprietatea notată cu P este o afirmație, o propoziție în care avem și un predicat. După legile uzuale ale gândirii, o propoziție este sau adevărată, sau falsă, nu există o a treia alternativă. Adevărat și fals sunt numite valori de adevăr. Găsim exemple de astfel de propoziții? Puteți decide valoarea de adevăr atașată următoarelor propoziții: „România se află în Europa” este o afirmație adevărată. Dacă o negăm spunând, „România nu se află în Europa”, ea devine falsă. (Să observăm că negăm predicatul!) Dacă P este propoziția în cauză, $\neg P$ va însemna negarea ei. Citim „nonP”. În raționament și în vorbire legăm propozițiile simple în multe feluri. Cel mai frecvent, însă, folosim ca operație de conectare „ȘI” ori „SAU”.

Cum sună?

(a) „În această vară vizitez Spania și merg în Franța.”;

(b) „În această vară vizitez Spania sau merg în Franța.”.

Dacă cele două propoziții, (a) și (b), au aceeași valoare logică, operațiile ȘI și SAU produc același efect? Nici adunarea numerelor nu este același lucru cu înmulțirea lor.

p ȘI q este adevărată dacă p și q sunt ambele adevărate

p SAU q este adevărată dacă cel puțin una dintre p sau q este adevărată.



Exersează!

- Dați cât mai multe exemple de situații în care se pot identifica mulțimi. Precizați elementele mulțimilor găsite.
- Folosind imaginea de mai sus, exersați exprimarea matematică pentru apartenență.
- Când enumerăm elementele unei mulțimi, contează ordinea acestora?
- O mulțime care nu are nici un element se numește mulțime vidă și se notează cu $\emptyset$. Oare ce înseamnă notația $\{\emptyset\}$? Același lucru cu $\emptyset$? (Încearcă să te gândești la cutii goale ș.a.m.d.)



Folosește ceea ce ai învățat!

Există câteva operații simple prin care putem construi noi mulțimi.

Reuniunea, notată prin $\cup$, se definește astfel:

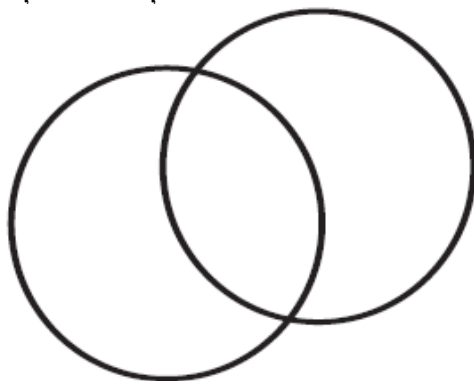
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Intersecția, în schimb, notată prin simbolul $\cap$, este definită în felul următor:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Altfel spus, reuniunea mulțimilor A și B conține acele elemente care provin ori din A , ori din B , pe când

intersecția lor este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi. Încearcă pe desenul alăturat să identifice reuniunea și intersecția.



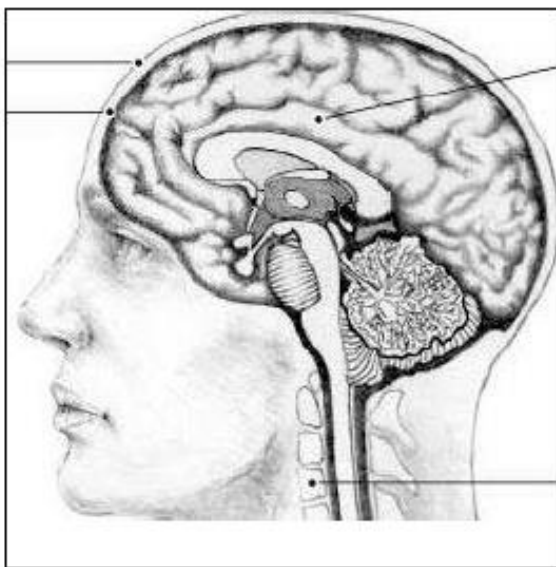
Ce putem spune despre intersecție în cazul în care mulțimile nu au nici un element comun?

Calculează $A \cup B$, apoi $A \cap B$, dacă $A = \{0, 1, 3, 5\}$, iar $B = \{0, 2, 3, 6\}$.



Știi că...?

Limba vorbită în situații cotidiene este mult mai nuanțată, mult mai complexă și flexibilă decât un limbaj științific, riguros. Deseori, nici măcar nu ne punem problema să decidem asupra valorii de adevăr a unei propoziții, doar vorbim și comunicăm, pur și simplu. Sunt situații când nu putem decide dacă afirmațiile sunt adevărate sau false.



Ce părere aveți despre:

„Săptămâna aceasta voi câștiga la Loto”? În creierul nostru, centrul gândirii logice este localizat în emisfera stângă. Știința de astăzi este capabilă să localizeze anumite regiuni ale creierului, care sunt centre ale unor funcții specifice, spre exemplu gândirea vizuală sau orientarea în spațiu.

Ipoteză și concluzie

2



Se întâmplă să...

„Am o problemă!” – vi se pare cunoscută o asemenea afirmație? Există o întreagă colecție de probleme (câteodată și soluții), de la procurarea hranei și satisfacerea nevoilor de bază, până la probleme științifice și spirituale. În cele mai multe situații, în încercarea de a rezolva problema, gândirea noastră recurge la logică și produce diferite raționamente, dar în combinație cu emoții și sentimente.



Citește și descoperă!

Problema trebuie mai întâi sesizată, recunoscută și apoi formulată. Suntem puși în diferite contexte și situații în care percepem anumite probleme. Iată un exemplu: Conducem mașina pe un bulevard lung de câțiva km, pe care avem din loc în loc semafoare. Constatăm că traficul este uniform, dar destul de intens. Deoarece ne grăbim, nu vrem să pierdem timpul stând la culoarea roșie a semaforului.

1. Se dau:		2. Se cer:
bulevardul		parcurea bulevardului
semafoarele		timp minim de parcurs
alte mașini		respectarea regulilor de circulație

Să observăm că datele problemei și cerințele ei se pot completa cu altele, după interesele și orientarea acelei persoane care-și formulează problema. Deseori, nu reproducem problema în cuvinte, ea este sesizată și percepută doar „în gând”. În modul cel mai firesc, încercăm să găsim o rezolvare, o soluție pentru problema noastră. În cazul de mai sus:

- alegerea vitezei adecvate, sau
- schimbarea frecvenței benzilor de circulație, sau
- folosirea acelor experiențe pe care le-am dobândit pe același drum, cu alte

ocazii, sau

•

Soluția este doar imaginată, pregătită în mintea noastră. Ca să se rezolve problema, soluția trebuie încercată, pașii imaginați ai rezolvării trebuie parcurși. Atunci când ne exprimăm „mai matematic”, datele problemei se numesc ipoteze, iar cerințele pe care le dorim îndeplinite concluzii.

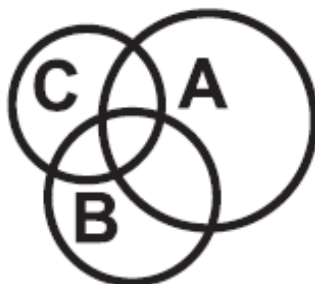


Exersează!

Un exercițiu: Urmează acum un text de problemă, așa cum găsim în multe cărți. Vom face un „antrenament” folosind acest text.

Într-un internat de studenți stau 52 de fete. Printre ele sunt blonde, sau fete cu ochi albaștri, sau fete istețe. 33 sunt blonde, 37 au ochi albaștri, 32 sunt istețe. Avem printre ele 22 de fete care sunt blonde și au ochi albaștri, 25 de fete au ochi albaștri și sunt istețe, iar 20 sunt blonde și istețe.

- Avem de-a face cu o situație de problemă?
- Ce întrebări putem formula?
- Cum putem despărți ipotezele (datele) de concluzii (cerințe)?
- Cum am putea extrage și organiza datele din textul de mai sus?
- Cum vom rezolva problema? (Folosiți ideile legate de mulțimi și operații cu mulțimi).



Dacă ați întrebat, cumva, câte fete istețe avem care nu sunt nici blonde, nici cu ochi albaștri, răspunsul corect este 4. Profesorul vă va ajuta să găsiți soluția la întrebarea voastră. Dacă problema vi se pare prea complicată, puteți să o reformulați, considerând doar două caracteristici, nu trei.



Folosește ceea ce ai învățat!

Distinge între ipoteză și concluzie în următoarele situații.

- a. Un obiect costă 120 RON, dar se ieftinește cu 15%. Care este prețul nou al produsului?
- b. Distanța până la destinație este de 600 km. Câți km mai rămân, dacă $\frac{3}{4}$ din drum s-au parcurs deja?
- c. O placă de faianță are dimensiunile de 20 cm și 40 cm. Avem de acoperit $3 m^2$ de perete. Dacă o placă de faianță costă 3 RON, ne ajung 150 RON ca să achiziționăm cantitatea necesară de faianță?



Știi că...?

În funcție de datele problemei, de ipotezele acceptate, se încearcă obținerea soluției, deci construirea unei rezolvări. Este sigur că se va găsi o asemenea soluție? Invers, s-ar putea întâmpla să găsim mai multe rezolvări acceptabile? În care dintre aceste situații ne aflăm depinde de problema în sine și de abilitățile noastre de rezolvare. Rezolvarea de probleme este, în definitiv, un șir de decizii. Spre exemplu:

În vârtoarea unui parc de distracții, dintr-odată constatăm că persoana cu care eram s-a rătăcit. Nu-o mai vedem și, chiar dacă am striga-o, oricum nu ne-ar auzi. Trebuie să ne întâlnim însă cu orice preț! Este evident că avem de-a face cu o problemă și trebuie să DECIDEM repede ce strategie vom urma. Aveți o propunere? (Întrebarea este: cum ar trebui să se comporte cei doi pentru ca șansele de a se regăsi să fie cât mai mari?) Este foarte important cum se formulează întrebarea problemei!

Deducția și inducția

3



Se întâmplă să...

După ce ați recunoscut și ați formulat problema, este normal să căutăm soluțiile ei. În matematică, mecanismul cel mai frecvent și cel mai puternic prin care căutăm să ajungem de la datele problemei la concluziile ei este deducția, iar un șir de deducții formează demonstrația. În viața cotidiană ne rezolvăm problemele pe căi empirice, mai puțin formale și folosind matematica în mod indirect.



Citește și descoperă!

Acceptăm următorul principiu? Dacă punctul de plecare este adevărat, argumentele deductive vor produce concluzii adevărate. Spre exemplu:

Dacă muncești, merită să fii plătit.

Ai muncit, deci, meriți plata.

Poate nu spunem de fiecare dată, dar deducția pleacă de la un „dacă” și se termină cu un „deci”. Acel „dacă” descrie și delimitează condițiile problemei, iar „deci” introduce ceea ce rezultă (sau ce poate rezulta) pe cale rațională din datele inițiale.

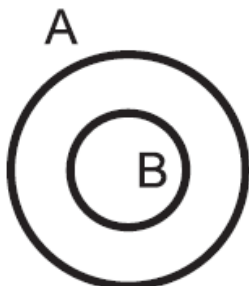
Puteți construi alte exemple similare cu cel de sus?

Avem, deci, următoarea schemă:

ipoteză $\longrightarrow$ concluzie

Să considerăm acum un exemplu simplu de deducție:

(Dacă) X face parte din Y. x aparține de X. (Deci) x aparține de Y.



Spre exemplu: Orașul Deva este în România. Prietenul meu locuiește în Deva. Deci el locuiește în România.

Identificați ipoteza și concluzia. Căutați alte exemple de tipul acesta!

Gândirea superficială, însă, ne poate conduce ușor la erori. Să urmărim un exemplu clasic:

Toate vrăjitoarele au pisici negre.
Vecina mea are o pisică neagră.
Deci vecina mea este o vrăjitoare.
Cum vi se pare acest raționament? Este evident că nu poate fi decât fals (chiar dacă vecina se comportă, uneori, ca o vrăjitoare).
Construiți exemple similare de raționamente greșite!



Exersează!

- Discutați cu profesorul vostru despre înțelesul cuvintelor: formal, empiric, deducție, deductiv, demonstrație.
- Plecând de la imaginea a două mulțimi care se intersectează, dați exemple de deducții (raționamente) corecte, apoi de deducții greșite. (Folosiți modelul din lecție, chiar dacă mulțimile sunt acum în altă relație.)
- Cu ce alte cuvinte și expresii introducem, în vorbirea uzuală, deducțiile noastre și concluziile la care ajungem? Puteți găsi asemenea exemple?



Folosește ceea ce ai învățat!

Un alt mod de a face raționamente este calea inductivă. În acest mod încercăm să generalizăm experiențe punctuale, unice, și să extindem valabilitatea lor. Dacă am întâlnit câțiva (chiar foarte mulți!) copii care erau curioși, suntem tentați să generalizăm această constatare și să afirmăm că toți copiii sunt curioși.

Evident, un asemenea raționament nu poate fi corect. Ajunge să găsim un singur copil care nu este curios și greșeala de gândire devine vizibilă. Această constatare nu înseamnă că nu avem și cazuri destule în care inducția produce concluzii corecte. De exemplu, se constată că numerele naturale se descompun în factori primi:

$1=1$, $2=2$, $3=3$, $4=2^2$, $5=5$, $6=2 \times 3$, $7=7$, $8=2^3$, $9=3^2$, ...

Nu chiar ușor, dar se poate demonstra, inductiv, că această proprietate este valabilă pentru orice alt număr natural. Este cunoscută metoda inducției matematice, metodă prin care se pot demonstra multe proprietăți, în special ale numerelor naturale. Deducțiile, simplificând total situația, reprezintă drumul de la ipoteză la concluzie și corespund, schematic, următorului tipar de gândire: DACĂ p , ATUNCI q . (A se înțelege: dacă are loc ceea ce afirmă propoziția p , atunci va avea loc și ceea ce afirmă propoziția q). Formal, notăm implicația aceasta cu: $p \longrightarrow q$. Deocamdată, să ne înțelegem că, prin raționament deductiv corect, din adevăr rezultă tot adevăr, iar dintr-o ipoteză falsă poate rezulta orice: și un adevăr, dar și un neadevăr. Cereți profesorului să vă ofere exemple de asemenea situații!



Știi că...?

Totul este o problemă...

Marele fizician german Max Planck a spus odată, în cadrul unei conferințe:

„Lumea noastră este plină de probleme. Acesta, de exemplu – și a arătat spre perete –, este pentru mine peretele din stânga sălii, dar pentru dumneavoastră este peretele din dreapta”.



Logica de toate zilele

4



Se întâmplă să...

În primele trei lecții am făcut cunoștință cu anumite aspecte ale gândirii logice, ale raționamentului riguros, așa cum le pretinde matematica. În viața de toate zilele, însă, normele de rigoare sunt înlocuite, mai degrabă, cu condiții de eficiență și cursivitate a gândirii. Chiar dacă folosim des diferite scheme de gândire, rar reflectăm asupra corectitudinii și respectării regulilor.



Citește și descoperă!

În vorbirea curentă folosim o serie de cuvinte și expresii care fac referire la ipotezele noastre, la concluziile așteptate sau la modul în care am gândit.

1. Caută înțelesul următoarelor expresii și explică-le:

- evident _____
- probabil _____
- prin urmare _____
- sută la sută _____
- imposibil _____

2. Completează lista de mai sus cu alte expresii care se leagă de raționamentul nostru și care descriu, oarecum, modul în care gândim!

3. Există anumite noțiuni sau operații pe care le folosim cu multă ușurință, fără un control adecvat al rațiunii. De exemplu: „Producția de lapte a crescut în luna iunie cu 18%” – scrie ziarul, fără să spună la ce se referă procentul de 18%. „Toți japonezii sunt harnici, știe toată lumea. Așadar, noul meu prieten japonez trebuie să fie și el harnic” – putem afirma, oricare dintre noi, în baza unei prejudecăți.

Discutați cu profesorul vostru înțelesul cuvântului „prejudecată”!

„Nu mai spăl mărul, doar n-am să mă îmbolnăvesc chiar acum și chiar eu!” – spunem, convinși că nouă nu ni se poate întâmpla. Puteți formula asemenea argumente și judecați?

4. În luna ianuarie, temperatura medie a celor 7 zile ale primei săptămâni a fost de 3°C. Înseamnă că cel puțin într-o zi temperatura a fost chiar de 3 °C! Nu e chiar așa. De exemplu, se putea întâmpla următoarea distribuție a temperaturilor: -1°C, 4°C, 2°C, -2°C, -1°C, 1°C, 15°C. Media lor este 3°C. Ceva similar se produce la școală, atunci când elevul primește media 7, la o notă de 4 și una de 10, fără să fi răspuns vreodată de 7. Căutați exemple similare cu cele de mai sus, din ziare, pliante sau alte publicații!

Exersează!

- Gândește-te la un prieten sau la o prietenă. Adunați, în două mulțimi, câteva dintre obiceiurile voastre, respectiv ale prietenului sau prietenei. (Să zicem cititul, mersul în excursii, privitul la TV, fumatul, dansul etc). Încearcă să reprezinți mulțimile prin diagrame. (Atenție, prietenii au, de regulă, și obiceiuri comune!)

- A este rudă cu B. B este rudă cu C. Atunci și A este rudă cu C. Bifează în căsuța potrivită:
adevărat _____ fals _____ nu pot determina

- A este prieten cu B. B este prieten cu C. Atunci și A este prieten cu C. Bifează căsuța potrivită:
adevărat _____ fals _____ nu pot determina

- La jocul de loto „6 din 49” au ieșit câștigătoare numerele: 2, 17, 23, 25, 36 și 40. Doi jucători, A și B, au pus următoarele numere:

A: 3, 11, 29, 31, 46 și 48

B: 3, 18, 24, 31, 36 și 44.

După cum vedeți, nu a câștigat nici unul. Care jucător a fost „mai aproape” de câștig? Bifați din nou!

A _____ B _____ la fel _____ nici unul _____ nu avem date relevante

Folosește ceea ce ai învățat!

Avem o serie de „ancore”, de repere, la care ne raportăm în procesul de gândire. Reflectați asupra următorului text.

„Tatăl și fiul se grăbeau la un meci important de baschet, când mașina lor se împotmoli exact pe trecerea cu calea ferată. Tatăl încerca disperat să repornească motorul, în timp ce zgomotul locomotivei se auzea din ce în ce mai aproape. Tatăl nu a mai rezistat până la spital. Când targa cu băiatul grav rănit a ajuns la ușa blocului operator, chirurgul, cu voce înecată de lacrimi și alb ca varul, a spus:

– Eu nu îl pot opera pe acest pacient. El este băiatul meu!”

Cum este posibil acest lucru? Ceva nu e în regulă în această poveste. Sau în gândirea noastră este vreo problemă? (Doi tați, totuși, nu putea avea băiatul.)



Știi că...?

Erorile de gândire, însă, duc la decizii greșite și, astfel, în loc să scăpăm de problemele noastre, ele se înmulțesc îngrijorător. Acesta e un motiv pentru care merită să învățăm matematică. Prin matematică exersăm gândirea corectă, raționamentul eficient și luarea deciziilor bune.

Autoevaluare

I

La sfârșitul primului capitol, vă propunem câteva exerciții pentru evaluare și autoverificare. Citiți cu atenție textul și încercați să reprezentați și să prelucrați problemele, chiar dacă nu le-ați mai întâlnit.

1. Ne gândim la o mulțime A . Vom spune că mulțimea B este o submulțime a mulțimii A dacă orice element din B aparține și mulțimii A . În acest caz, mai spunem că mulțimea B este inclusă în mulțimea A . Să nu confundați incluziunea cu apartenența!

a. Reprezentați prin desen o mulțime A în care este inclusă o mulțime B .

b. Mulțimea A are 4 elemente și este de forma $\{a, b, c, d\}$. Dați exemple de submulțimi ale mulțimii A .

c. Enumerați toate submulțimile lui A . (Facem convenția că pentru orice mulțime, mulțimea vidă și mulțimea inițială sunt considerate ca submulțimi ale mulțimii date).

d. Câte submulțimi ați găsit? Oare câte submulțimi sunt în caz general, când A are n elemente?

2. Ați întâlnit în lecție operația ȘI și SAU, prin care conectăm două propoziții. Valoarea de adevăr a propoziției noi depinde de valoarea de adevăr a componentelor. De exemplu:

p	q	$p \text{ ȘI } q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \text{ SAU } q$

a. Interpretați primul tabel și completați următoarea afirmație:

$p \text{ ȘI } q$ este o propoziție _____, doar atunci dacă _____
_____ sunt adevărate.

b. Completați cel de-al doilea tabel. (Dacă citiți atent, în ghid găsiți informații suficiente!)

c. Interpretați tabelul al doilea și completați următoarea afirmație:

$p \text{ SAU } q$ este o propoziție _____, doar dacă _____
_____ sunt false.

3. În tabelul următor găsiți o serie de afirmații în legătură cu care trebuie să decideți dacă sunt adevărate sau nu.

Afirmația	Adevărat	Fals	Nu pot decide
Nu înțeleg matematica.			
Toți oamenii sunt muritori.			
Nimeni nu e mai presus de lege.			
Triunghiurile pot fi asemenea.			
$2^{2006} < 2^{2007}$			
Dacă $a = b$, atunci $b = a$.			
Eu nu spun adevărul.			
$1200 : 20 = 15 \cdot 6$			
Voi trăi 100 de ani.			

Alegeți afirmațiile care conțin negație în textul lor. Transformați aceste propoziții astfel încât să nu mai fie negative. Analizați valoarea de adevăr a propozițiilor astfel obținute.

4. Calculați:

a. Distanța până la destinație este de 800 km. Câți km mai rămân pe mâine dacă $\frac{3}{4}$ din drum s-au parcurs deja azi?

b. Un obiect costă 100 RON, dar se scumpește cu 12%. Putem cumpăra din 250 RON două asemenea produse?

5. 33% dintre elevii unei clase sunt fete, iar 67% băieți, 50% sunt bruneți, iar 25% sunt blonzi. Care afirmație de mai jos este sigur adevărată?

a. Toți băieții sunt blonzi.

b. Unele fete sunt blonde.

c. Sunt și băieți bruneți.

d. Toți băieții și toate fetele au culoarea părului la fel.

(Sfaturi: Elaborați un desen sau o schemă pentru a înțelege mai bine problema. Eliminați afirmațiile care sunt sigur false.)

6. Analizați corectitudinea următorului raționament:

Toate pătratele au diagonalele congruente.

Toate pătratele sunt și romburi.

Rezultă că:

Toate romburile au diagonalele congruente.

a. Care sunt ipotezele noastre? Care este concluzia?

I: _____

C: _____

b. Sunt adevărate ipotezele? Este adevărată concluzia?

c. Din ipoteze adevărate poate rezulta o concluzie falsă?

NUMARARE ȘI COMBINATORICĂ

Capitolul

II



Titlul acestui capitol indica de la început intenția noastră: regândirea modului în care știm sa numaram. În aparență, numaratul nu este o problema, pentru ca avem impresia cu toții ca știm sa numaram. Capitolul de față ne atrage atenția ca numaratul nu este chiar așa de simplu. În special atunci nu este simplu, când avem multe variante de numarat și metodele uzuale nu ne mai ajuta. Capitolul 2 prezinta urmatoarele titluri:

2.1. Probabilitați și jocuri de noroc

2.2. Încercam sa numaram?

2.3. Alegeri și voturi

2.4. Paradoxuri și dileme

Veți face cunoștința cu noțiunea de probabilitate, cu referire la jocurile de noroc sau la alte situații care ne sunt cunoscute. Veți exersa anumite proceduri de numarare și veți vedea ce importanța au acestea în numaratul voturilor la alegeri, de exemplu.

De asemenea, veți învăța câte ceva despre paradoxuri și despre situații (aparent) imposibile. Acestea sunt capcane ale gândirii noastre și reprezinta cazuri foarte interesante.

Capitolului 2 îi sunt alocate 8 ore, completate cu 2 ore destinate evaluării și autoevaluării.



Probabilități și jocuri de noroc

1



Se întâmplă să...

Folosiți frecvent expresia „probabil”? Când un eveniment nu vi se pare sigur, este totuși probabil să se realizeze. Sigur, ați jucat diferite jocuri de noroc, începând cu jocuri de cărți, până la partide de jocuri pe calculator. V-ați dat seama că toate acestea au ceva în comun? Câștigul depinde de noroc, de șansă, nu doar de priceperea voastră. Câștigul sau pierderea nu sunt deloc sigure, sunt doar probabile.



Citește și descoperă!



La începutul meciului de fotbal, arbitrul aruncă o monedă, pentru a decide care echipă alege terenul și care va avea lovitura de început. De fapt nu arbitrul alege. Cum cade moneda, cu stema sau cu pajura, nu depinde de arbitru. Sunt două șanse, două variante de realizare a evenimentului: sau stema, sau pajura.

În multe jocuri de societate se aruncă cu zarul. Norocul sau ghinionul alege acum din șase posibilități, după acea față a zarului care ajunge sus după aruncare. La jocul de Loto 6 din 49 situația e mai complicată. Se extrag, întâmplător, 6 numere din 49, dar care sunt acestea este decis, din nou, de soartă, nu de noi. Că apare stema sau pajura, un punct pe fața de sus a zarului, două sau șase, că se extrage sau nu un anumit număr sunt evenimente egal probabile.

Probabilitatea lor depinde de numărul cazurilor

favorabile realizării evenimentului studiat și de numărul total al cazurilor. Dacă aruncăm cu moneda, probabilitatea să apară stema este: $P = \frac{1}{2}$ (50%) pentru că un singur caz este favorabil pentru ceea ce dorim (aparitia stemei se realizează într-un singur mod), din două variante posibile. La aruncarea zarului,

fața cu numărul 6 va apărea cu probabilitatea $1/6$ (sau aproximativ 16,66%), deoarece un singur caz se raportează acum la șase posibilități egal probabile. Cu jocul de loto să mai așteptăm puțin. Probabilitatea realizării unui eveniment este deci un raport: se compară numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului cu numărul total al cazurilor posibile.

Dacă evenimentul este notat cu A , iar probabilitatea realizării lui cu P , putem scrie mai formal:

$$P(A) = \frac{\text{numar cazuri favorabile}}{\text{numar cazuri posibile}}$$

Dacă evenimentul dorit de noi este imposibil, probabilitatea lui este 0, iar dacă este sigur, probabilitatea atașată lui este 1. Altfel, valoarea probabilității unui eveniment este un număr cuprins între 0 și 1. Dacă știm să calculăm o probabilitate sau dacă reușim măcar să o estimăm, avem o imagine despre certitudinea realizării acestuia, o ancoră în plus pentru gândirea noastră. Dacă un eveniment are probabilitatea de 75%, adică este foarte probabil, nu înseamnă că el se va realiza cu siguranță. El va rămâne în continuare doar o șansă, o posibilitate, mai mult sau mai puțin probabilă.

Exerseaza!

1. M-am rătăcit în pădure. Poteca se bifurcă, iar eu, care nu știu drumul bun, aleg la întâmplare între stânga și dreapta. Care este probabilitatea alegerii drumului bun?

2. Care este probabilitatea să te fi născut în martie? Dar în noiembrie? Dar într-o lună oarecare?

3. În mod sigur ai jucat jocul de table. Oare ce șansă avem să obținem „dublu șase” aruncând cu două zaruri?

4. Un experiment de gândire: arunci cu moneda și notezi rezultatul. Repeti acest exercițiu, de exemplu de 20 de ori. Ce crezi, vei avea sigur de 10 ori „stemă” și de 10 ori „pajură”? Repetă exercițiul de 1000 de ori. Vei avea 500 de „stemă” și 500 de „pajură”? (Nu este sigur că avem această repartitie, dar cu cât repetăm mai mult experimentul, cu atât mai mult rezultatele sunt mai aproape de probabilitatea

calculată a evenimentului. Aceasta se numește legea numerelor mari.)

Folosește ceea ce ai învățat!

Cunoașteți jocul alba-neagra? Oare de ce nu merită să puneți pariu că veți ghici unde este obiectul ascuns? Cel care vă provoacă la joc are aceleași șanse de câștig ca și voi? Încercați să exprimați probabilitatea câștigului și vă veți convinge. Un joc este corect și cinstit dacă șansele de câștig sunt egale pentru toți partenerii, adică 50%, în cazul în care sunt doi competitori. În acest caz, decide norocul și strategia aleasă de jucători. Strategia este calea pe care o surmează un jucător pentru a-și asigura câștigul.

Sunt și jocuri în care norocul nu contează, doar priceperea jucătorului. Cel mai cunoscut exemplu este jocul de șah.



Știi că...?

Atunci când dorim să calculăm o probabilitate, avem de aflat două numere: cel al cazurilor favorabile și numărul total al cazurilor. Acestea sunt probleme de numărare. Numărarea nu este întotdeauna foarte simplă. Dacă sunt multe variante de luat în calcul, lucrurile se complică destul de mult. În lecția ce

urmează ne vom ocupa puțin de acest aspect. Dacă evenimentul dorit de noi este imposibil, probabilitatea lui este 0, iar dacă este sigur, probabilitatea atașată lui este 1. Altfel, valoarea probabilității unui eveniment este un număr cuprins între 0 și 1. Dacă știm să calculăm o

probabilitate sau dacă reușim măcar să o estimăm, avem o imagine despre certitudinea realizării acestuia, o ancoră în plus pentru gândirea noastră. Dacă un eveniment are probabilitatea de 75%, adică este foarte probabil, nu înseamnă că el se va realiza cu siguranță. El va rămâne în continuare doar o șansă, o posibilitate, mai mult sau mai puțin probabilă.

Încercăm să numărăm?

2



Se întâmplă să...

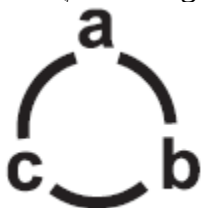
Nu avem o zi în viața noastră în care să nu fim nevoiți să numărăm ceva. Dacă nu altceva, cel puțin banii din buzunar. De multe ori, însă, numărarea poate deveni foarte complicată, pentru că avem de controlat un mare număr de cazuri, variante sau situații. Vi s-a întâmplat să vă simțiți în încurcătură într-o situație de numărare? Vi s-a întâmplat să greșiți la o numărare?

Citește și descopera!

Iată cel mai simplu caz: dacă e să răspundem repede la întrebarea „câte numere sunt de la 12 la 20”, mai toți răspundem: „8”! Normal, din moment ce $20 - 12 = 8$, nu? Dacă însă numărăm atent, șirul 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 conține 9 numere, nu 8. Cum ar arăta calculul în cazul nostru? Dar dacă vrem să aflăm câte numere sunt de la a la b?

Dacă avem de numărat doar câteva obiecte, situația e simplă. De la o mărime, însă, numărarea – prin înșirarea elementelor – nu ne mai este posibilă. De pildă, ce ați face să puteți număra câte cărămizi sunt într-o grămadă mare? Oare ordonarea, punerea în ordine v-ar ajuta într-un fel? În spatele scrierii numerelor se ascunde ceva similar. Știm cu toții că, de exemplu, $563 = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, adică 3 „blocuri” a câte un element, 6 „blocuri” a câte 10 elemente și 5 „blocuri” a câte 100 elemente chiar dacă aveam în gând o grămadă dezordonată, amorfă de 563 elemente.

Puteți explica, în același mod, semnificația altor numere scrise în sistemul de numerație zecimal? De multe ori avem de-a face cu un anumit număr de obiecte, pe care le ținem în atenția noastră, însă în altă ordine. O asemenea schimbare de ordine, în care nu se modifică numărul obiectelor se numește permutare. Un caz simplu: avem 3 ghivece de flori, să spunem a, b, c, pe care vrem să le așezăm în geam. Găsiți în câte moduri putem face acest lucru? Un ajutor:



În ce fel ne ajută desenul?

Dacă permutăm 3 obiecte, numărul total al permutărilor este 6. Acest număr se obține prin produsul $1 \cdot 2 \cdot 3$, ceea ce se numește factorial în matematică, notat cu „!”. Mai exact, vom scrie $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ sau $4! = 24$ etc.

Exerseaza!

- Un drapel are culorile galben (G), albastru (A) și negru (N), dispuse vertical și arată astfel: G-A-N, ceea ce înseamnă ordinea culorilor de la stânga la dreapta. Poți aranja culorile și în altă ordine? Câte drapеле diferite ai putea face?
- Primești 6 musafiri, pe care vrei să-i așezi la o masă rotundă. În câte moduri diferite poți face acest lucru?
- Arunci cu două zaruri identice. Care este probabilitatea că vei obține „dublu șase”? În câte moduri poate apărea 6-6 pe cele două cuburi? Dar numărul total al combinațiilor îl poți calcula? Puteți dezvolta aceste idei?
- Este adevărat că $100 < 5! < 120$? Ce vom face pentru a găsi un răspuns sigur? Folosește ceea ce ai învățat!

1. În campionatul de fotbal al județului X participă 16 echipe. Fiecare echipă joacă cu fiecare altă echipă și într-o săptămână toți joacă doar un singur meci. Găsiți câte meciuri se vor organiza, dacă se joacă în sistemul tur-retur. Notați echipele cu A, B, C etc. și elaborați o planificare a meciurilor combinând echipele la întâmplare. Puteți folosi un tabel în acest scop?

2. În jocurile de noroc, numărul variantelor, câștigătoare sau necâștigătoare, este foarte mare. Să vedem un caz simplu: un joc loto, în care trebuie să ai 4 numere extrase din 15 posibile, astfel încât ordinea extragerii să conteze. 4 numere din 15 numere date se pot extrage în peste 32.000 de moduri. Din toate aceste posibilități, doar una singură ne convine, dacă am completat doar un singur bilet. Așadar,

șansa câștigului este mai mică decât $1/32.000$. Altfel spus, ar trebui să completăm peste 32.000 de bilete, ca să fim siguri de câștig. Doar că biletele costă....



Știi că...?

Legenda spune că inventatorul jocului de șah ar fi cerut, drept răsplată, 1 bob de grâu pe primul pătrat al tablei de șah, 2 boabe pe cel de-al doilea, 4 boabe pe următorul ș.a.m.d. Adică, pe fiecare pătrat, exact dublul numerelor de boabe de grâu de pe pătratul precedent. Folosind puterile, pe primele 8 pătrate ale tablei de șah trebuia să fie $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, respectiv $2^7 = 128$ boabe de grâu. Poți exprima numărul de boabe de pe ultimul pătrat?

(Atenție la exponentul lui 2!) Ai o idee despre cât de mare este acest număr? Dar dacă adunăm toată cantitatea de pe fiecare pătrat? Rezultatul este un număr imens.



Marele matematician german Carl Friedrich Gauss (1777-1855) era considerat încă de la o vârstă foarte mică un mare talent. Într-o zi, pe vremea când era la școala primară, învățătorul le-a cerut copiilor să adune toate numerele naturale de la 1 la 1000. Probabil că era obosit și spera să se odihnească până când copiii calculau. Nici nu a terminat bine enunțul problemei, că micul Gauss a și venit cu o rezolvare neașteptată: a observat că $1 + 1000 = 1001$; $2 + 999 = 1001$; $3 + 998 = 1001$ ș.a.m.d. Continuați voi raționamentul și calculul pentru a afla suma.

Alegeri și voturi

3



Se întâmplă să...

Din patru în patru ani avem an electoral: ne alegem reprezentanții pentru consiliile locale, pentru parlament și ne dăm votul pentru președintele țării. Participarea la alegeri este un exercițiu democratic și o datorie civică în același timp. Dacă ești cetățean român și ai peste 18 ani, du-te și votează!



Citește și descoperă!

De ce este nevoie ca să putem vorbi despre o alegere? Evident, alegerea este făcută de cineva, de o persoană sau un grup de persoane. Uneori, am văzut deja, în locul nostru alege hazardul, norocul sau ghinionul, iar ceea ce ne revine nouă este doar estimarea probabilității realizării unei variante sau a alteia. Spre exemplu:

Experiment	Varianta 1	Varianta 2
aruncatul cu moneda	stema	pajura
alegeri în Consiliul Local	Popescu	Ionescu
alegerea culorii mașinii	verde	galben

Am lăsat loc în tabel ca să completați cu alte exemple. Comentăți cui îi aparține alegerea în aceste cazuri. Studiate din punct de vedere matematic, alegerile sunt foarte interesante. Mai sus s-au văzut

exemple de alegeri din două variante. Dacă numărul variantelor este mai mare, lucrurile se complică. În exemplul următor presupunem că tu decizi, tu ești alegătorul. Ai de analizat trei alternative:

A. mă voi duce pe jos la locul meu de muncă;

B. fac o plimbare cu bicicleta până la locul meu de muncă;

C. iau tramvaiul și apoi parcurg, pe jos, 100 m până la locul meu de muncă.

Ce preferi comparând varianta A cu B și, separat, varianta B cu C? Folosește simbolul „»” pentru a nota preferința ta. De exemplu, dacă preferi A mai mult decât B, scrie $A \gg B$. Completează următorul mic tabel:

	A comparat cu B	B comparat cu C
Opțiunea mea		

Încearcă acum să reflectezi asupra întrebării: „rezultă, de mai sus, preferința mea în ceea ce privește A sau C?”. Alegerea între mersul pe jos și plimbatul cu bicicleta, apoi între plimbatul cu bicicleta și mersul cu tramvaiul are vreo consecință în alegerea mea între mersul pe jos sau cel cu tramvaiul? Și ce se întâmplă dacă A, B și C desemnează politicieni dintre care vrei să alegi să te reprezinte? Și nu vei alege de unul singur, așa că s-ar putea ușor întâmpla să câștige candidatul pe care nici nu îl preferi. Dacă alegem din trei, după „sistemul” de mai sus, nu este sigur nici măcar că va câștiga cel care are susținere majoritară.

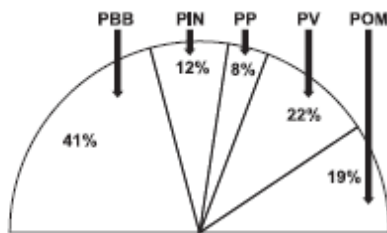
Exerseaza!

- Cereți profesorului să vă explice ce înseamnă majoritatea și minoritatea!
- Ce înseamnă expresia „alegere democratică”?
- Cum explicați faptul că în comisiile cu drept de decizie avem, întotdeauna, un număr impar de membri?
- Notăm cu A, B și C preferințele la o anumită alegere (din trei variante) și presupunem că avem doar trei alegători.

a. Câte moduri de ordonare are fiecare alegător pentru preferințele sale?

b. Care este numărul total al variantelor celor trei alegători?

- La o alegere proporțională, reprezentarea celor aleși este proporțională cu numărul voturilor acordate. Așa se întâmplă în alegerile parlamentare. Analizați și explicați graficul de mai jos, în care procente exprima numărul locurilor obținute în parlament de către „formațiunile politice”. Parlamentul are 321 de locuri. Calculați câte locuri va obține fiecare partid în acest parlament.



PBB - Partidul Băutorilor de Bere
 PIN - Partidul Iubitorilor de Natura
 PP - Partidul Pensionarilor
 PV - Partidul Verde
 POM - Partidul Oamenilor Muncii

Să numim paradox fenomenul în care A este preferat lui B, B este preferat lui C, dar C este preferat lui A. În cazul descris în penultimul exercițiu, se poate calcula probabilitatea ca în urma exprimării preferințelor de către cei trei alegători să apară paradoxul. Această probabilitate este de aproximativ 0,05, deci relativ mică. Dacă, însă, crește numărul alegătorilor și a variantelor din care se alege, probabilitatea de a apărea paradoxul tinde rapid spre 1. Cu alte cuvinte, paradoxul apare aproape sigur!

Folosește ceea ce ai învățat!

Cercetătorii s-au întrebat dacă există sau nu alegeri corecte. Au pus la îndoială corectitudinea alegerilor așa-zis „democratice”. Cel mai cunoscut rezultat este teorema de imposibilitate a lui Arrow. În esență, acest rezultat afirmă că nu există nici un sistem de alegeri care să corespundă unor condiții rezonabile impuse, cum ar fi: libertatea alegerii individuale, fără dictatură, lipsa efectelor alternativelor irelevante etc.



Știi că...?



Originile alegerilor politice datează din secolul al 6-lea î.Hr., din democrația din Atena. Sistemele de vot s-au dezvoltat mult pe parcursul istoriei, spre exemplu în secolul al 13-lea, în Statul Veneția și, mai cu seamă, în timpul Revoluției Franceze din anii 1770. Intransitivitatea preferințelor între A, B și C era descrisă de marchizul de Condorcet încă din acești ani.

Paradoxuri și dileme

4



Se întâmplă să...

În lecția precedentă am amintit de paradoxuri în legătură cu voturile și alegerile. Ați mai auzit în vorbirea curentă expresia „paradox” sau „paradoxal”? Oare ce înseamnă un paradox? Unde le putem întâlni?

Citește și descopera!

Cunoaștem lucruri care par a fi adevărate, dar care sunt, de fapt, false sau contradictorii. Invers, sunt și situații care ascund contradicții aparente, dar sunt de fapt corecte, adevărate. Iată un exemplu celebru:

Achile și broasca țestoasă

La un concurs de alergare, Achile stă la linia de plecare, iar broasca țestoasă are un avans de 100m. Achile fuge de 100 de ori mai repede decât broasca. În timp ce el ajunge acolo unde a fost broasca, aceasta a avansat deja cu 1m. Până ajunge Achile aici, broasca mai parcurge 1cm, și tot așa, mai departe, până la infinit. Astfel, Achile nu va ajunge niciodată broasca din urmă! Cum este posibil acest lucru? Simțul realității ne spune că nu poate fi așa! Dar atunci unde este greșeala în raționamentul de mai sus?

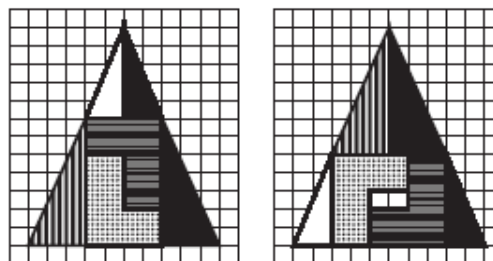
(Suma infinită a intervalelor de timp, din ce în ce mai scurte, este totuși un timp finit, exact timpul care îi este necesar lui Achile să ajungă din urmă broasca!) De multe ori, paradoxul este creat de un calcul

neglijent. Un alt exemplu celebru:

Trei turiști înnoptează la un hotel. Camera lor costă 30 Euro și dimineața plătesc fiecare câte 10 Euro. Patronul observă, însă, că prețul corect ar fi fost doar 25 Euro și cere recepționarului să înapoieze cei 5 Euro. Acesta se gândește că 5 Euro nu se pot împărți ușor în trei și, mai bine păstrează el 2 Euro ca să returneze turiștilor diferența de 3 Euro. Astfel, turiștii au plătit $9 \times 3 = 27$ Euro și cu cei 2 Euro păstrați de recepționar avem 29 Euro. Unde a dispărut 1 Euro? Puneți-vă în locul oricărui din turiști sau în locul patronului și încercați să completați tabelul de mai jos!

	Debit (cheltuială pt. turiști)	Credit (venit pt. hotel)
Costul real al camerei (patului)		
Bani lăsați recepționarului		

De multe ori avem de-a face cu paradoxuri vizuale, așa cum ați putut vedea și în Modulul 2 (de exemplu, la lecția Realitate sau desen), sau cu situații în care se amestecă vizualul cu calculul defectuos. Avem și acum un exemplu celebru:



Exerseaza!

- Reluați exemplul cu crocodilul, din lecția de început! Analizați din nou dilema!
- Ce se întâmplă dacă se „amestecă” debitul cu creditul? Este normal să se adune cheltuielile cu veniturile?

- Aranjați datele problemei de mai jos în tabel! Reprezentați variantele posibile sub forma unei matrice! (Profesorul vă va ajuta!)

Folosește ceea ce ai învățat!

Sunt prinși doi răufăcători care – există suspiciunea – au comis împreună o crimă. Dovezi concrete nu există, dar este foarte probabil că ei sunt făptașii. Suspecții sunt închiși separat în două celule, fără să poată comunica între ei. Judecătorul face fiecăruia dintre ei următoarea ofertă, puțin neobișnuită:

„Dacă TU recunoști fapta și EL neagă, te eliberăm, iar colegul tău primește 10 ani și cazul se încheie.

Dacă și tu, și el mărturisești, amândoi primiți câte 5 ani de închisoare și închidem cazul. Dacă nici tu, nici el nu recunoașteți nimic, primiți câte 1 an de închisoare și închidem dosarul. Colegului tău i se va face exact aceeași ofertă ca și ție!”.

Care strategie este cea mai bună pentru suspecți: mărturia sau negarea? Să ne gândim cu capul unuia dintre suspecți! Continuați raționamentul pe care îl începem mai jos! Completați pe caietele voastre:

1. „Dacă eu mărturisesc, colegul are două posibilități: sau nu Dacă și el recunoaște, primesc ani. Dacă el nu recunoaște, sunt liber. Dacă nu mărturisesc, din nou sunt două situații, după cum va reacționa colegul. Dacă el, primesc 10 ani și el e liber, iar dacă și el mărturisește, primesc 5 ani.

E clar că VOI MĂRTURISI, pentru că astfel pedeapsa probabilă este mai mică”. Numai că la fel se va gândi și celălalt suspect, deci va depune mărturie și se vor alege amândoi cu câte 5 ani de detenție, cu toate că puteau scăpa cu doar 1 an dacă n-ar fi recunoscut nimic nici unul din ei. Aici este DILEMA!

2. „Pe de altă parte, pot presupune că rezultatul raționamentului meu va fi identic cu al colegului. Deci dacă eu recunosc, va recunoaște și el și primim câte 5 ani. Dacă eu nu recunosc nimic, nici

el nu va recunoaște și primim câte 1 an. Așadar, NU RECUNOSC NIMIC.” Aici e a doua DILEMĂ!

Care raționament este corect? Ambele? Totuși, ele au produs două rezultate diferite! Altfel spus, adevărata dilemă este următoarea: cooperăm sau nu cooperăm în asemenea situații? (Dacă există asemenea situații!)

Autoevaluare II

Vă propunem din nou câteva exerciții pentru evaluare și auto-verificare. Recomandăm să citiți textul cu mare atenție, să încercați să înțelegeți și să prelucrați problemele chiar dacă nu le-ați mai întâlnit.

1. Mai jos aveți o listă cu afirmații care descriu evenimente sigure, probabile sau imposibile. Alegeți și bifați în dreptul lor varianta corectă. (Aveți un exemplu.)

	Sigur	Probabil	Imposibil
Ziua de mâine va ține 24 de ore.			
Cupa Mondială la fotbal va fi câștigată în 2010 de Brazilia.			
Dacă arunc cu zarul, obțin un „șase”.		✓	
„Orice minune ține trei zile”.			
Ajung cu mașina în 10 minute de la Arad la Timișoara.			
La testul de evaluare obțin punctaj maxim.			

2. Considerăm șirul numerelor naturale de la 1 la 1000.

- Câte numere găsim în acest șir care se divid la 3?
- Câte numere găsim în acest șir care se divid la 6?
- Dar care nu se divid nici la 2, nici la 3, nici la 5?

3. Cuvântul rob este scris cu literele R, O, B. Căutați toate permutările șirului R – O – B.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Avem printre acestea cuvinte care au sens?

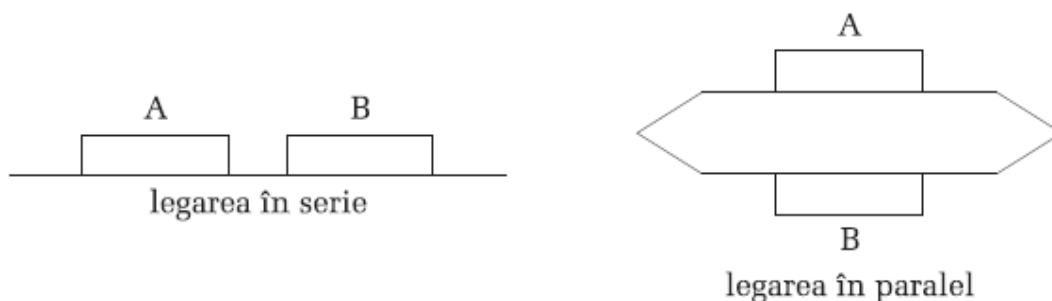
4. Într-o familie cu doi copii, cel puțin unul este băiat. Care este probabilitatea ca al doilea copil să fie fată? Reprezintă toate variantele posibile în următorul tabel:

		Primul copil	
		B	F
Al doilea copil	B		
	F		

Care este varianta imposibilă în conformitate cu textul?

5. Mai jos avem suma numerelor naturale pare de la 2 la 1000: $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 996 + 998 + 1000$. Care este valoarea acestei sume?

6. În desenul de mai jos am redat legarea în serie și legarea în paralel a componentelor.



Componenta A sau B se pot defecta. Estimați probabilitățile pentru cazurile descrise mai jos:

	Legarea în serie funcționează	Legarea în paralel funcționează
A și B defecte		
A sau B defecte		
A și B bune		
A sau B bune		

7. Pe o insulă trăiesc două feluri de locuitori:

- care întotdeauna spun adevărul
- care întotdeauna mint

Am întrebat un localnic: – Tu spui adevărul?

a. Care este răspunsul localnicului?

b. Descrieți modul în care v-ați gândit.

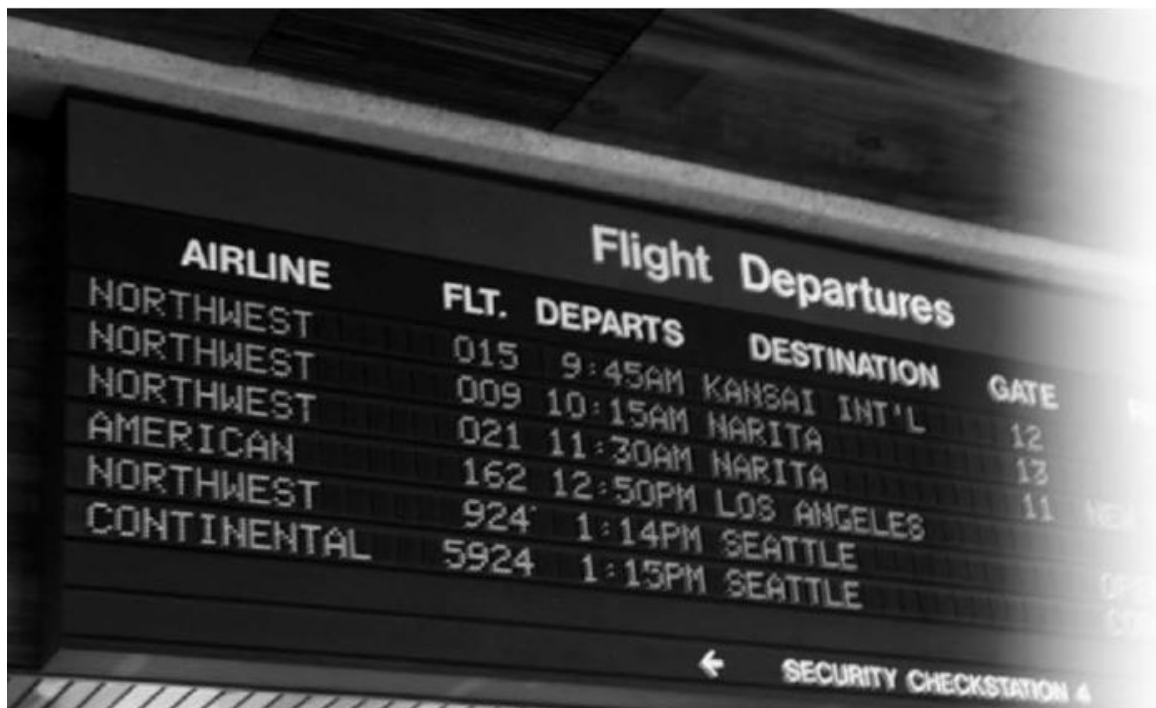
8. Extragem la întâmplare un număr din primele o sută de numere naturale. Calculați probabilitatea ca numărul extras să fie număr prim!

9. Un zar are două fețe galbene, trei verzi și una neagră. Care este probabilitatea ca după aruncarea zarului să obținem:

- a. o față galbenă,
- b. o față verde,
- c. o față neagră?

Capitolul

III



AIRLINE	FLT.	DEPARTS	DESTINATION	GATE
NORTHWEST	015	9:45AM	KANSAS INT'L	12
NORTHWEST	009	10:15AM	NARITA	13
NORTHWEST	021	11:30AM	NARITA	11
AMERICAN	162	12:50PM	LOS ANGELES	
NORTHWEST	924	1:14PM	SEATTLE	
CONTINENTAL	5924	1:15PM	SEATTLE	

← SECURITY CHECKSTATION 4

Ultima parte a ghidului este o colecție de probleme, adunate pe categorii. În lecțiile acestui capitol vom regăsi majoritatea ideilor prezentate în prima parte, aplicate aici la probleme pe care le considerăm importante.

Temele capitolului 3 sunt următoarele :

- 3.1. Scheme logice
- 3.2. Descompuneri și recompuneri
- 3.3. Proporționalitate
- 3.4. Ecuații
- 3.5. Probleme... cu probleme
- 3.6. Funcții simple

Dintr-un anumit punct de vedere, foarte multe probleme vă cer să descompuneți și apoi să recompuneți lucrurile. Dacă nu altceva, datele problemei cu siguranță. Veți vedea din nou proporțiile și câteva situații de proporționalitate. Veți exersa să reformulați anumite probleme, să le redați ca ecuații și să le rezolvați sub această formă.

În ultima parte a capitolului veți învăța ce sunt funcțiile și cum putem modela cu ajutorul lor anumite fenomene ale lumii care ne înconjoară. Pentru capitolul 3 aveți 12 ore la dispoziție și alte 2 ore pentru evaluare și autoevaluare.



Scheme logice

1



Se întâmplă să...

În mod sigur întâlniți mereu probleme, sub o formă sau alta. Unele se rezolvă folosind diverse scheme, diverse mecanisme care conduc la rezultat. Alte probleme sunt mai deosebite și rezolvarea lor cere mai multă ingeniozitate. Este cert însă că oricare ar fi problema, raționamentul corect și logica nu prea se pot pune la o parte. Primul pas, și de data acesta, este să avem un plan de rezolvare. În acest sens ne pot ajuta „schemele logice”.

Citește și descopera!

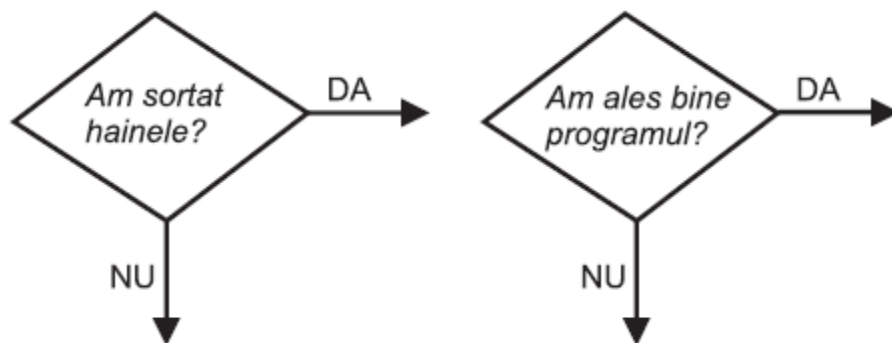
Alegem următoarea problemă: spălatul hainelor cu mașina automată de spălat. Aparent, acest lucru nu este o problemă. Spălăm atât de des încât rezolvarea acestei sarcini se întâmplă mecanic. Să ne uităm, totuși, puțin mai atent. Iată „datele” problemei noastre

*mașina de spălat, sursa de curent, sursa de apă rece,
hainele murdare, detergentul*

Vom avea de parcurs unele proceduri și operații (mai mult sau mai puțin matematice). În cazul nostru:

*punerea hainelor în mașina de spălat; adăugarea
detergentului; deschiderea robinetului de apă, conectarea
la sursa de curent; alegerea programului; pornirea*

În timpul prelucrării problemei, avem de luat decizii. De exemplu:

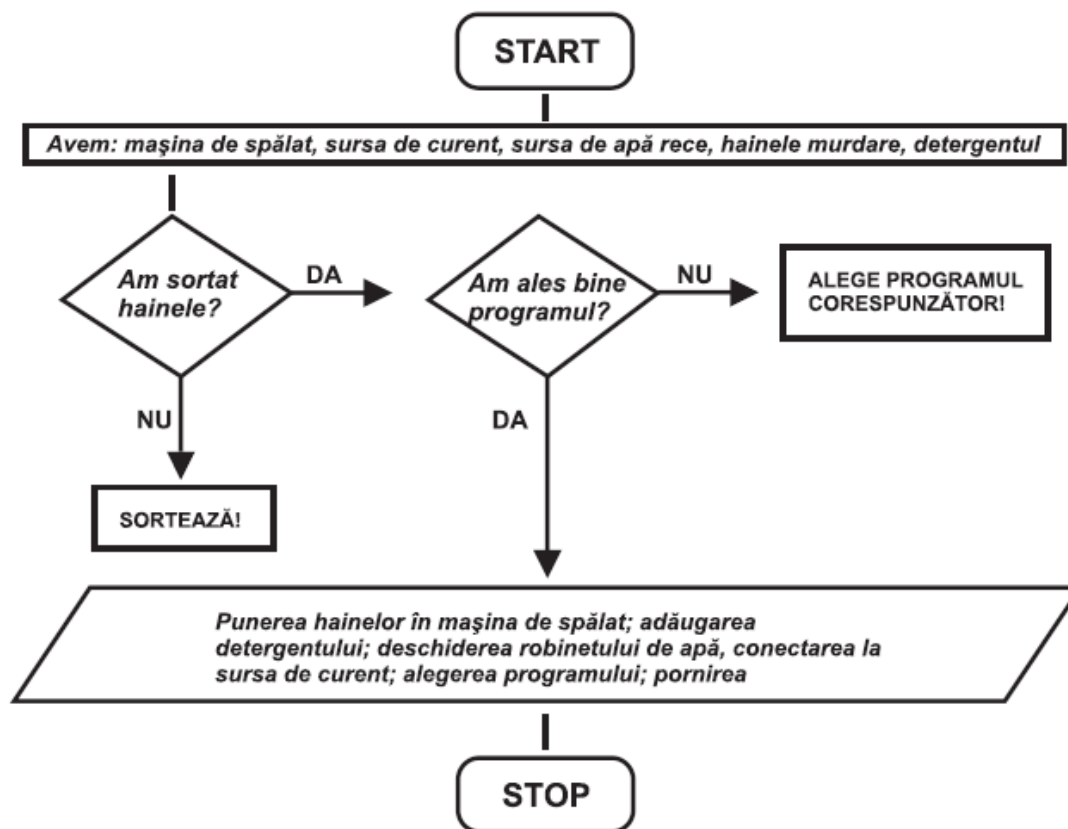


Desigur, putem avea mai multe asemenea blocuri de decizie. Puteți formula alte întrebări asupra cărora trebuie să reflectăm? Poate legat de detergent? De duritatea apei? Altele?

Să mai adăugăm și momentul de început și de sfârșit:



Astfel, problema spălatului hainelor, chiar și cu mașina automată, apare SCHEMATIC, în felul următor:



Comentarii

În realitate, spălatul cu mașina merge mai ușor. Ceea ce am vrut să ilustrăm este mecanismul logic, deseori ascuns sau invizibil, care orientează acțiunile noastre și care oferă un plan de rezolvare a problemelor cu care ne confruntăm.

Exersează!

- Construiește o schemă logică pentru rezolvarea următoarei probleme: ne-am rătăcit în orașul Berlin, dar avem hartă și cunoaștem limba germană. Vrem să găsim gara centrală.
- Încearcă să elaborezi o schemă logică pentru „dilema prizonierului”!
- Cum ar arăta o schemă logică ce descrie construcția unei case de vacanță?
- Dar schema rezolvării unei ecuații simple, de tipul $5x = 20$?



Se întâmplă să...

A descompune ceva în componentele sale este o activitate obișnuită pentru toată lumea. Copilul își desface jucăria din curiozitate, iar tânărul, bicicleta sau motorul. De cele mai multe ori nu descompunerea este problema, ci recompunerea, refacerea originalului. Vi s-a întâmplat să desfaceți ceva și să nu

mai reușiți să îl faceți la loc?

Citește și descopera!

Imaginați-vă un număr, de exemplu 12. Am mai văzut că această scriere ascunde puterile lui 10, conținute în numărul ales, în felul următor: $12 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Numărul 12 este compus dintr-un 10 și un 2. Oare am putea descompune acest număr (sau orice alt număr natural) și în alt mod? Să încercăm două idei noi.

1. Descompunerea în sumă

Spre exemplu, $12 = 3 + 7 + 2$. Încercați să descompuneți în sumă acest număr și în alte moduri, folosind

a. doar termeni diferiți

b. și termeni care să se repete

Câte descompuneri găsiți?

2. Descompunerea în produs

Acum, de exemplu, $12 = 2 \cdot 6$ sau $12 = 1 \cdot 12$ și, astfel, 12 apare ca un produs, nu ca o sumă. În acest caz, factorii în care se descompune numărul se numesc și divizori ai lui. Printre asemenea descompuneri, cea mai importantă este descompunerea în factori primi.

Un număr natural se numește număr prim dacă, în afara lui 1 și el însuși, nu are alți divizori.

Exemple de numere prime: 2, 3, 5, 17, 31, ...

Exercițiu. Căutați alte exemple de numere prime și un mod de a verifica dacă un număr este prim sau nu.

Reluând numărul 12, el apare descompus în factori primi astfel: $12 = 2^2 \cdot 3$

Un rezultat foarte important și celebru, cunoscut deja din vremea lui Euclid, afirmă că:

Orice număr natural se poate descompune în mod unic în factori primi.

(dacă ordinea factorilor nu contează)

Deseori avem restricții în realizarea descompunerii unui număr. Iată un exemplu:

Se poate plăti suma de 130 RON folosind doar bancnote de 5 și 10 RON? Dacă da, câte bancnote de fiecare fel se vor folosi? Încercați să analizați ce legătură se poate stabili între textul de mai sus și expresia: $5x + 10y = 130$.

Expresia de mai sus este o ecuație. Mai precis, o ecuație cu două necunoscute, notate prin x și y . Exersează!

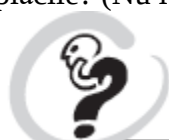
- Descompuneți în factori primi numerele: 18, 25, 44, 60 și 120.
- Descompuneți aceleași numere în sumă, în câteva moduri alese după preferință.
- Rezolvați ecuația $5x + 10y = 130$.

- Câte soluții găsiți? Este perechea (6,10) soluție? Dar (10,6)?
- Găsiți soluții și pentru ecuația $7x + 10y = 130$?

Folosește ceea ce ai învățat!

În geometrie, un caz tipic de descoperire – recompunere este cel al pavajelor. În varianta cea mai simplă, un pavaj acoperă o anumită suprafață, utilizând diverse figuri geometrice plane: triunghiuri, pătrate, hexagoane ș.a.m.d., sau combinații ale acestora. Un pavaj trebuie să fie plăcut, estetic. Există figuri plane cu care se poate acoperi un plan fără probleme: figurile se ating perfect, nu se suprapun și vor umple complet planul. Așa se comportă, de exemplu, triunghiul echilateral. Rămâne adevărată afirmația de mai sus dacă folosim triunghiuri oarecare? (Înainte de a răspunde, încearcă să desenezi, să faci o schiță!)

Și acum un exercițiu simplu: Baia are o formă dreptunghiulară, cu o latură de 3m și una de 2,2m. Se poate acoperi această suprafață cu plăci de gresie de dimensiunile 44×20 cm fără să se taie plăcile? (Nu luăm în considerare rosturile dintre plăci!) Folosește un desen, o schiță „la scară”.



Știi că...?

Euclid a fost unul dintre cei mai de seamă savanți ai omenirii. Cel mai important merit al său este elaborarea unui tratat de matematică, intitulat Elemente, care adună în 11 volume toate cunoștințele matematice ale vremii, într-un mod sistematic și riguros. În cărțile lui Euclid se găsește primul sistem axiomatic al geometriei. Geometria lui Euclid a fost de foarte mare influență de-a lungul secolelor. O serie de „elemente” din Elemente se regăsesc și azi în manualele școlare de matematică.

Proportionalitate

3



Se întâmplă să...

Ați încercat vreodată să folosiți o carte de bucate sau o rețetă culinară pentru un anumit fel de mâncare? Ce putem face dacă rețeta este formulată pentru o porție de 4 persoane, iar nouă ne trebuie de 12? Sau, dimpotrivă, doar pentru 2 persoane? Cum vom calcula cantitățile necesare? Citește și descopera!

Avem mai jos rețeta pentru budincă de carne cu sos de smântână, cu următoarele ingrediente: 1 kg carne de vițel sau de purcel, 1 felie de franzelă, 1 ceașcă cu lapte, 75g unt, 4 ouă, sare, piper, salată și sos de smântână. Presupunem că rețeta este pentru 4 persoane. Cum vom schimba cantitățile dacă pregătim acest fel de mâncare pentru 16 persoane? Vom modifica proporțional fiecare cantitate înmulțindu-le, în cazul nostru, cu 4. Completați mai jos:

Porție de 4 persoane	Porție de 16 persoane	Porție de 2 persoane
1kg carne		
1 felie de pâine		
1 ceașcă cu lapte		
75g unt		
4 ouă		

Dacă ați calculat, să observați că toate cantitățile s-au modificat de același număr de ori, adică în mod proporțional. Rețeta presupune că ingredientele sunt într-un anumit raport: dacă creștem cantitatea de carne, va crește și cantitatea de ouă – de exemplu – de același număr de ori. Asemenea cantități sunt considerate direct proporționale. Să vedem un alt exemplu! Presupunem că pentru a ajunge în localitatea X avem nevoie de 3 ore, dacă viteza medie a mișcării este de 60 km/h. Ce se va întâmpla dacă viteza medie crește la 90 km/h? Va crește și timpul necesar pentru a parcurge acest drum? Viteza s-a mărit de 1,5 ori și, tocmai din această cauză, timpul s-a micșorat de același număr de ori. Un asemenea raport se numește proporționalitate inversă. În cazul în care vrem să facem calcule cu cantități direct sau invers proporționale, avem la îndemână regula de trei simplă. Simplificând lucrurile, să reluăm exemplele de mai sus. Avem schematic:

4 persoane 75 g unt

16 persoane x g unt

ceea ce exprimă, în exemplul acesta, că ne-am întrebat ce cantitate de unt este necesară dacă pregătim mâncare pentru 16 persoane. Dacă proporționalitatea este directă, vom avea $x = (16 \cdot 75) / 4 = 300$ (g unt). Creșterea numărului persoanelor de 4 ori duce la creșterea cantității tot de 4 ori. Altfel spus, avem:

$$4/16 = 75/x, \text{ de unde } x = 300.$$

Exerseaza!

- Ce înseamnă viteză medie? Dar media vitezelor? Puteți găsi câteva exemple?
- Cum am putea exprima schematic situația din a doua problemă? Care proporție este corectă: $3/x = 60/90$ sau $3/x = 90/60$?

• Calculați valoarea lui x din aceste proporții și interpretați rezultatele obținute. La ce trebuie să fim atenți înainte de calculul necunoscutei la regula de trei simplă?

Folosește ceea ce ai învățat!

Am întâlnit deja proporționalitatea în modulul intitulat Forme, la lecțiile referitoare la asemănare. De exemplu, două triunghiuri sunt asemenea dacă laturile lor sunt proporționale și unghiurile congruente, două câte două. Un alt caz tipic este ilustrat prin exercițiul de mai jos:

La o lucrare avem alocată suma totală de 1800 RON. Această sumă trebuie împărțită în mod proporțional, în funcție de volumul de muncă efectuată, între trei muncitori. Primul a lucrat 5 părți din lucrare, al doilea muncitor 3 părți, iar cel de-al treilea doar o parte. Cât i se cuvine fiecărui muncitor?

Încercați să rezolvați această problemă folosind ca punct de plecare următoarea relație, care exprimă proporționalitatea: $x/5 = y/3 = z/1$, unde x,y și z înseamnă sumele pe care le vor primi

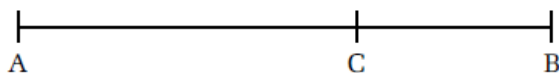
cei trei muncitori. (Profesorul vă va ajuta să prelucrați informațiile și să ajungeți la rezultatul căutat!)

Explicați de ce vom împărți 1800 la 9.



Știi că...?

O proporție cu totul specială este cea din „secțiunea de aur”. În prezentarea cea mai simplă, această valoare apare atunci când avem un segment de dreaptă, cu un punct pe el, așezat în așa fel încât lungimea segmentului întreg comparat cu lungimea segmentului mai mare să fie aceeași valoare ca și lungimea segmentului mai mare comparat cu lungimea segmentului mai mic. Pe desen este mult mai simplu:



$$AB/AC = AC/CB$$

Ecuatii

4



Se întâmplă să...

Am văzut în lecțiile precedente că multe probleme se reduc la căutarea unei (unor) cantități necunoscute. Diferitele situații în care ne pune viața cotidiană se rezumă la căutarea, punerea unor întrebări adecvate și găsirea răspunsurilor la acestea. Răspunsurile sunt, foarte des, diverse mărimi exprimabile prin numere.

Întrebările noastre se pot exprima în multe situații pe cale formală, sub forma unor ecuații.

Citește și descopera!

Iată un prim exemplu clasic:

Suntem proprietari la un mic magazin de haine. Se apropie perioada reducerilor de prețuri și ne decidem să reducem prețul unui costum cu 25%. După puțin timp hotărâm să majorăm prețul, tot cu 25% din prețul actual, și astfel costumul va costa 320 RON. Ce întrebare vom pune în mod firesc? Probabil ne

interesează dacă prețul actual este mai mare sau mai mic decât prețul inițial. Notăm prețul inițial cu x . Reducerea cu 25% din acesta face ca noul preț al costumului să fie $0,75x$. (De ce?) Dacă acesta se va mări cu 25% din el, vom putea scrie pentru prețul final:

$$0,75x + 0,75x \cdot 0,25 = 320.$$

Această expresie este o ecuație, cu necunoscuta x .

Rezolvarea ecuației înseamnă găsirea acelor valori ale necunoscutei (x , în cazul nostru) pentru care egalitatea este adevărată. (Observați că pentru un număr ales la întâmplare în locul lui x egalul nu este corect!) Nu orice ecuație are o formă atât de simplă. Spre exemplu: Pardoseala băii este de 16 m² și vrem să o pavăm cu 64 de plăci de gresie de formă pătratică. Cât de mare trebuie să fie plăcile de gresie?

Care este întrebarea, ce căutăm? Dar datele problemei? Ne ajută și acum o notație pentru necunoscută? Ce vom nota și cu ce literă? Cum transcriem problema noastră într-o ecuație?

Exersează!

- Rezolvați ecuația din primul exemplu. Cereți ajutorul profesorului și fiți atenți la ordinea operațiilor.
- Observați întrebările din exercițiul al doilea. Rețineți că asemenea întrebări trebuie să formulați singuri în rezolvarea problemelor!
- Rezolvați acum ecuația $64x^2 = 16$. Câte soluții obținem? Câte soluții corespund situației problemă care a condus la ecuație?
- Încercați să rezolvați următoarele ecuații pentru a exersa tehnicile de rezolvare:

a. $2x + 4,5 = x + 6,3$

b) $5(3x - 1) = 15x$

c) $3x^2 = 27$

Analizați numărul soluțiilor acestor ecuații! Vă amintiți de proporțiile din lecția precedentă?

Deseori, avem o necunoscută într-o proporție, adică o ecuație. Cât este valoare lui x din proporția $x/5 = 3/7$?

Folosește ceea ce ai învățat!

În problemele reale avem, de regulă, mai mult decât o necunoscută. Problema reformulată în limbajul ecuațiilor va necesita mai multe ecuații pentru găsirea necunoscutelor. Astfel, avem de-a face cu sisteme de ecuații. Iată un exemplu pentru un sistem de ecuații foarte simplu:

5 kg de detergent de două calități diferite costă 76 RON. Primul fel de detergent are prețul de 16 RON, iar al doilea tip costă 14 RON. Se înțelege de la sine că ne vom întreba câte kg de detergent avem din fiecare fel. Ne-ar ajuta notațiile și în această problemă? Câte necunoscute căutăm? Ce vom nota cu litere și ce simboluri să folosim? Și tot așa, șirul întrebărilor poate continua. Cu cât întrebăm mai mult și mai pertinent, cu atât vor crește șansele de rezolvare a problemei.

O rezolvare: notez cu x cantitatea de detergent de primul fel și cu y cantitatea de al doilea fel.

Atunci:

$$x + y = 5$$

$$16x + 14y = 76$$

Ecuațiile considerate împreună formează un sistem de ecuații. Rezolvând acest sistem (profesorul vă va arăta cum!), primim pentru x valoarea 3 și pentru y valoarea 2. Interpretați rezultatul obținut și reflectați dacă soluția este acceptabilă sau nu.



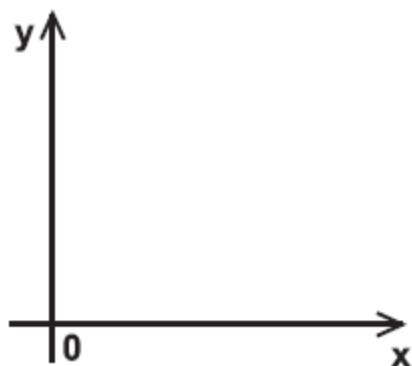
Știi că...?

Soluția sistemului se poate reprezenta într-un sistem de axe de coordonate, cu condiția ca valoarea lui x să fie măsurată pe orizontală, iar a lui y pe axa verticală. Astfel, soluția ne furnizează un punct geometric. Acest punct este tocmai intersecția celor două drepte descrise mai sus de ecuațiile sistemului.

Gândiți-vă geometric:

- două drepte se intersectează întotdeauna?

- pot două drepte să coincidă?



Altfel: câte soluții poate avea un sistem de ecuații? Încercați să analizați cazurile posibile și să căutați exemple pentru ceea ce găsiți.

Exercițiu suplimentar: Căutați alte exemple de sisteme de ecuații și încercați să le rezolvați!

Probleme... cu probleme 5



Se întâmplă să...

În lecția aceasta vom încerca să studiem câteva probleme mai deosebite. Asemenea probleme sunt, de fapt, exerciții de gândire, de raționament și de decizie. Chiar dacă nu le întâlnim sub această formă în viața de zi cu zi, indirect, ele ne sunt de mare folos. Multe din ele se pot aduna în clase de probleme.

Citește și descopera!

1. Din motive de simplitate, ne referim la mișcarea uniformă, adică la situația când viteza mișcării rămâne neschimbată. Iată situația: Pe un fluviu, un vapor parcurge o anumită distanță în 4 ore, în sensul curgerii apei. Invers, împotriva curentului apei, același drum ar ține 4 ore și 20 de minute. Putem întreba mai multe lucruri, dar este firesc să ne punem problema în cât timp ar parcurge aceeași distanță o plută care se deplasează cu viteza apei?

Înainte de căutarea unei rezolvări, încercați să vă formulați un plan, să puneți întrebări ajutătoare, să căutați asemănări ale problemei cu altele pe care poate le-ați mai văzut.

Încă ceva: nu atât rezultatul este interesant și important, cât modul în care ajungem la el! Notăm viteza proprie a vaporului cu v , iar viteza apei cu va . Exprimăm drumul parcurs, care este același, și egalăm expresiile astfel obținute:

$$4 \cdot (v + va) = 13/3 \cdot (v - va).$$

De aici primim $v = 25 va$, iar asta înseamnă că timpul necesar pentru ca pluta să parcurgă distanța este de 104 ore.

Discutați în clasă rezolvarea acestei ecuații. Interpretați rezultatul obținut!

2. Un alt caz pe care îl prezentăm este legat de amestecuri și aliaje. Spunem că titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios din acel aliaj și masa totală a aliajului. Problema noastră este următoarea:

Un aliaj de aur și cupru cântărește 20g și are titlul de 0,850. Cât aur ar trebui să adăugăm aliajului pentru ca acesta să aibă titlul de 0,950? Puteți folosi notații, ca și în problema precedentă. Reformulați problema folosind ecuații.

3. Încă un exemplu:

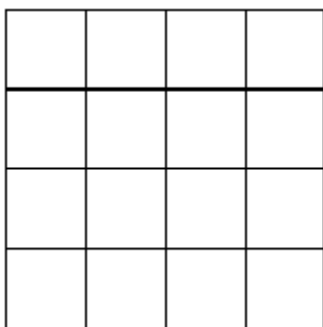
Avem 3 obiecte pe care vrem să le împărțim la 2 persoane, dar fiecare dintre acestea trebuie să primească cel puțin un obiect. În câte moduri se poate face acest lucru? Pentru rezolvarea acestei probleme vă propunem să încercați metode euristice. Mai simplu: găsiți un mod de a număra variantele, folosind o schiță sau orice altă metodă prin care vă puteți organiza această muncă de căutare. Și din nou: puneți întrebări și răspundeți la ele. De exemplu: Care 2 obiecte din acele 3? În câte moduri putem alege aceste 2 obiecte din obiectele date? Convingeți-vă astfel că nu atât răspunsul este greu de dat la o întrebare, ci mai degrabă formularea însăși a întrebării!

Exerseaza!

- Descompuneți numărul 24 în factori primi. Găsiți toți divizorii numărului 24.
- Rezolvați problema 3 de mai sus lucrând în perechi. Comparați răspunsurile găsite și alegeți răspunsul corect.

Folosește ceea ce ai învățat!

Multe probleme se leagă de jocuri. Un joc strategic presupune – așa cum s-a mai văzut – o serie de decizii și rezolvări de probleme. Vă propunem un exemplu, un joc pe care îl puteți încerca chiar și în clasă. Jocul se numește puncte și linii și se joacă în doi, pe o rețea de 4×4 pătrate, așa cum se vede pe desenul alăturat. Folosiți în joc două culori!



Regula jocului: fiecare jucător desenează, pe rând, cu culoarea sa, o linie orizontală sau verticală, unind două puncte alăturate ale rețelei. Dacă o celulă (pătrățel de 1×1) are toate laturile de aceeași culoare, se colorează și în interior și respectivul jucător primește o mutare în plus. Mai multe celule alăturate și de aceeași culoare formează un lanț. Câștigă cel care realizează mai multe pătrate colorate cu culoarea sa.

Jocul este aparent simplu, dar strategia de câștig este o problemă destul de complicată, neelucidată complet.



Știi că...?

Există în matematică multe probleme nerezolvate. Un caz celebru este al numerelor prime gemene. Numerele prime gemene sunt perechile de numere prime de forma $(p, p + 2)$. De exemplu: (3, 5) sau (29, 31). Găsiți și alte exemple de perechi de numere prime gemene? Problema la care ne referim afirmă că există o infinitate de perechi de numere prime gemene. Mai exact, se întreabă dacă este așa sau nu, deoarece nu se cunoaște o rezolvare a acestei conjecturi.

Funcții

6



Se întâmplă să...

Vom face acum cunoștință cu ideea de model și modelare, prin exemplul relativ simplu al funcțiilor. Cuvântul funcție este utilizat și în vorbirea curentă. Spre exemplu, spunem că „adaptăm viteza mașinii în funcție de condițiile de drum”. În matematică, însă, expresia are un înțeles bine precizat. De altfel, noțiunea de funcție este una dintre cele folosite în matematică. Citește și descopera!

Lumea în care trăim este plină de relații și corespondențe. Multe dintre acestea au fost recunoscute de oameni și folosite în încercarea lor de a înțelege și modela realitatea. Să observăm câteva exemple:

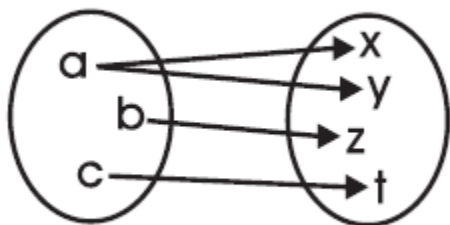


Este vreo corespondență între individ și codul lui numeric personal? Sau între mașină și numărul de înmatriculare?

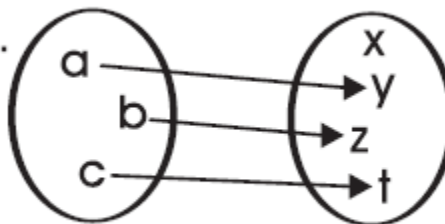
Exersează!

Căutați cât mai multe asemenea exemple, în care există o corespondență între elementele a două mulțimi. Identificați aceste mulțimi și descrieți în cuvinte relația sau corespondența pe care o descoperiți. Putem reda prin desen, simplificând lucrurile, cel puțin două situații diferite:

1.



2.



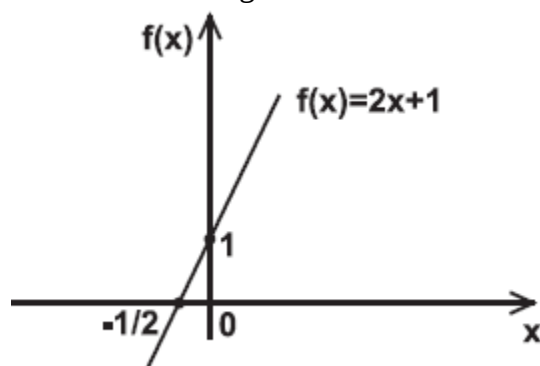
Care sunt deosebirile între aceste două situații? Analizați cu atenție mulțimile și relațiile dintre elementele lor. Săgețile simbolizează corespondența între elemente. Desenul din figura 1 nu reprezintă o funcție, pe când desenul 2 da! Putem vorbi despre funcție dacă: fiecărui element dintr-o mulțime i se asociază un singur element dintr-o altă mulțime în baza unei legi sau a unei reguli de asociere.

Dacă mulțimile sunt A și B, iar regula de corespondență este f, putem scrie formal $f: A \rightarrow B$, ceea ce reprezintă funcția despre care vorbim. Mulțimea A se numește domeniul de definiție, iar B este domeniul de valori. Avem funcții în primele exemple? Dar în cele găsite de voi în primul exercițiu?

Folosește ceea ce ai învățat!

De cele mai multe ori – cel puțin în matematică – corespondența se face între mulțimi de numere. Dacă aceste mulțimi sunt tocmai mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, atunci funcția se mai poate pune în evidență și printr-un grafic. Nu e nevoie decât de un sistem de axe de coordonate xOy, așa cum l-ați întâlnit în modulul 3.

Iată un asemenea grafic:



De pe grafic putem citi cu ușurință corespondența realizată prin funcție, putem vedea ce valoare îi corespunde unui anumit x ales de pe axa orizontală.

Simbolic, scriem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

Din nou exerciții:

- Mulțimea A are 3 elemente, iar mulțimea B are 4. Câte funcții diferite putem avea definite pe A cu valori în B? Aceasta este o nouă problemă de numărare. Să ne imaginăm că elementele mulțimii B sunt patru cutii goale, în care vom așeza cele trei elemente ale mulțimii A, în toate modurile posibile.

Primul element se poate pune în oricare din cutii, deci avem 4 posibilități. Al doilea element are, de asemenea, 4 locuri posibile, deci alte 4 posibilități ș.a.m.d.

Astfel, numărul total al funcțiilor este, în cazul nostru, 4^3

- Câte funcții de tipul $f: A \rightarrow B$ avem dacă ambele mulțimi au, de exemplu, 5 elemente?
- Câte funcții există în cazul general, când mulțimea A are n elemente, iar B are m elemente?



Știi că...?

Ați văzut vreodată pe coperta din spate a unei cărți ISBN-ul atașat cărții respective? V-ați întrebat ce reprezintă acest ISBN (International Standard Book Number)? ISBN este un cod de 10 cifre (simboluri) care descrie și identifică respectiva carte, adică respectivul titlu. Fiecare cifră sau simbol oferă o anumită informație despre țara unde este editată cartea, editura, tipul publicației ș.a.m.d.

Autoevaluare



Problemele și exercițiile care urmează vă vor ajuta să evaluați modul în care ați înțeles cele mai importante idei din capitolul 3. Citiți atent întrebările, reflectați asupra lor și, înainte de rezolvare, construiți-vă un plan.

1. Descompuneți în factori primi numerele 64, 120 și 84, apoi în sumă de câte 7 termeni fiecare.
2. Recompuneți numerele 64, 120 și 84 în următorul fel:

$$2x + 3y = 64$$

$$7x + 5y = 120$$

$$2x + 6y = 84$$

3. Pe un flacon cu detergent scrie: $2\text{ l} = 8\text{ l}$

(l înseamnă litri). Este corectă această egalitate? Ce vrea ea să exprime?

4. Rezolvați ecuațiile de mai jos:

a) $2x = 6$; b) $3x + 1 = 16$; c) $x + 12 = 12$; d) $1971 - x = 1$; e) $x/4 = 11$.

5. Amestecăm 10l de benzină cu prețul de 3,5 RON/litru, cu 20l de benzină cu prețul de 3,7RON/litru. Obținem 30l de benzină. Cât costă un litru din acest amestec?

6. Să presupunem că asociem unor semne înțelesul cuvintelor, după cum urmează:

☼ – soare; ♣ – cântă;

♥ – bronzat; ♠ – bărbat;

▲ – munte; ♦ – cărare.

Construiți câteva „propoziții” folosind acest *cod*. Un exemplu:

♠ ♣ ☼ va însemna „bărbat – cântă – soare”, adică „un bărbat cântă la soare”.

7. Scrieți alfabetul și numerotați ordinea literelor. Redați cuvintele de mai jos prin șiruri de numere care reprezintă ordinea literelor din cuvântul respectiv. (De exemplu, la cuvântul *ac* corespunde 13, din moment ce *a* este prima literă a alfabetului, iar *c* este pe locul 3.)

bar →

deviz →

faraon →

motor →

8. Așezați în ordine logică următoarele operații:

- tipărește;
- conectează la curent;
- deschide documentul;
- deschide calculatorul;
- pune hârtie în tavă;
- verifică.

9. O carte este scrisă de trei autori. Primul a scris 4 capitole, al doilea 2 capitole, iar al treilea autor doar un capitol. Capitolele sunt la fel de mari. Cartea a produs un câștig net de 2800 RON. Cum ar trebui să împărțim corect această sumă între cei trei autori?

10. Textul care urmează este o rețetă pentru o porție de 4 persoane. Ingrediente: 3 morcovi, 1 pătrunjel, 2 legături tarhon, 3 linguri ulei, 1 lingură făină, 3 linguri smântână, 1/2 linguriță boia dulce, 2 linguri orez, 1 ou, 1/2 l borș, 1,5 l apă. (Rețeta este pentru borș de tarhon)

- a. Modificați cantitățile de ingrediente, în mod proporțional, pentru o porție de 20 de persoane.
- b. Ne pregătim de nuntă. Ce cantități vom folosi pentru 100 de persoane?

12. Construiți un dreptunghi folosind echerul, astfel încât laturile dreptunghiului să respecte proporția de aur. Pentru aceasta, folosiți valoarea aproximativă a acestui raport: 1,6. (Valoarea exactă se poate doar aproxima, numărul care exprimă secțiunea de aur este irațional.)

13. Reprezentați grafic, într-un sistem de axe de coordonate, temperaturile unei săptămâni, în funcție de zilele în care acestea au fost înregistrate. Valorile sunt, în ordine: 7°C, 5°C, 7°C, 8°C, 4°C, 3°C, 6°C.

Uniți punctele obținute cu segmente de linii drepte și interpretați desenul astfel construit.